

Testul 1

Problema 1. Fie k un număr întreg, $k \geq 2$. Determinați numerele naturale nenule $n_1, n_2, \dots, n_k$, care îndeplinesc simultan următoarele condiții:

$$n_2 \mid 2^{n_1} - 1, \quad n_3 \mid 2^{n_2} - 1, \quad \dots, \quad n_k \mid 2^{n_{k-1}} - 1, \quad n_1 \mid 2^{n_k} - 1.$$

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și fie D, E, F picioarele înălțimilor din A, B , respectiv C . Dreptele BC și EF se intersectează în punctul P , iar paralela prin D la dreapta EF intersectează dreapta AC , respectiv AB , în punctul Q , respectiv R . Arătați că cercul PQR trece prin mijlocul laturii BC .

Problema 3. Fie a, b, c numere naturale nenule, astfel încât $a < b < c$, și fie $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ funcția definită prin $f(n) = n - a$, dacă $n > c$, și $f(n) = f(f(n + b))$, dacă $n \leq c$. Determinați numărul de puncte fixe ale lui f .

Problema 4. Fie m și n două numere naturale nenule și fie $A_1, \dots, A_m$ mulțimi de numere naturale nenule, astfel încât:

- (1) A_i și A_j sunt disjuncte, oricare ar fi indicii distincți i și j ;
- (2) $|A_i| = n, i = 1, \dots, m$;
- (3) Oricare ar fi indicele i , niciun element din A_i nu este divizibil cu niciun element din A_{i+1} , unde indicii sunt considerați modulo m .

Determinați numărul maxim de perechi ordonate (a, b) , unde a și b sunt elemente din A_i -uri diferite și b este divizibil cu a .