

Olimpiada Națională de Matematică

Primul test de selecție pentru juniori
Iași, 8 aprilie 2010

✓ **Problema 1.** Să se determine numerele prime p, q, r cu proprietatea că:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1.$$

Problema 2. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $\angle BCD = 120^\circ$, $\angle CBA = 45^\circ$, $\angle CBD = 15^\circ$ și $\angle CAB = 90^\circ$. Să se arate că $AB = AD$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ și fie n un număr natural, $n > 1$. Pe latura AB considerăm punctul M astfel încât $n \cdot AM = AB$. Pe latura BC considerăm punctele $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ astfel încât

$$BP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \dots = P_{n-1}C = \frac{1}{n}BC.$$

Să se arate că:

$$\angle MP_1A + \angle MP_2A + \angle MP_3A + \dots + \angle MP_{n-1}A = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

✓ **Problema 4.** Fie n un număr natural nenul și numerele întregi nenule $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ cu proprietățile:

- a) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$;
- b) $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = \dots = x_n^2 + y_n^2$.

Să se arate că n este par.

Problema 5. Fie n un număr natural, $n \geq 5$. Considerăm n puncte distincte în plan, fiecare colorat sau cu alb, sau cu negru. Pentru fiecare k natural, $1 \leq k < \frac{n}{2}$, o *mutare de tip k* înseamnă selectarea a exact k puncte și schimbarea culorii acestora. Să se determine valorile lui n pentru care, oricare ar fi k și indiferent de colorarea inițială, există o secvență finită de mutări de tip k , la sfârșitul căreia toate punctele au aceeași culoare.

Țimp de lucru 4 $\frac{1}{2}$ ore.

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Al doilea test de selecție pentru juniori

București, 24 aprilie 2010

Problema 1. Considerăm pe un cerc un număr finit de numerele reale cu suma mai mare strict decât zero. Dintre toate sumele ce au ca termeni numere pe poziții consecutive pe cerc, fie S cea mai mare sumă și s cea mai mică sumă. Să se arate că $S + s > 0$.

Problema 2. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale astfel încât

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$$

și

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = 1.$$

Să se arate că:

$$|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq \frac{n-1}{2}.$$

Problema 3. Să se determine numerele întregi n , $n \geq 2$, cu proprietatea că numerele $1!, 2!, 3!, \dots, (n-1)!$ dau resturi diferite la împărțirea cu n .

Notă: $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$, oricare ar fi $k \geq 1$ natural.

Problema 4. Fie ABC un triunghi scalen și fie I centrul cercului înscris în triunghi. Considerăm cercurile γ, δ de diametre IB , respectiv IC , și γ', δ' simetricele cercurilor γ, δ față de dreptele IC , respectiv IB . Să se demonstreze că centrul cercului circumscris triunghiului ABC aparține dreptei ce trece prin punctele de intersecție ale cercurilor γ' și δ' .

Notă: Laturile unui triunghi scalen **nu** sunt egale.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Al treilea test de selecție pentru juniori
București, 25 aprilie 2010

Problema 1. Considerăm două triunghiuri echilaterale ABC și MNP cu proprietatea că $AB \parallel MN$, $BC \parallel NP$ și $CA \parallel PM$, astfel încât suprafețele triunghiurilor se intersectează după un hexagon convex. Distanțele dintre cele trei perechi de drepte paralele sunt cel mult egale cu 1. Să se arate că cel puțin unul dintre cele două triunghiuri are latura cel mult egală cu $\sqrt{3}$.

Problema 2. Fie n un număr întreg, $n \geq 2$. Pentru fiecare număr $k = 1, 2, \dots, n$, notăm cu a_k numărul multiplilor lui k din mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ și fie $x_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{a_k}$. Să arate că:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Problema 3. Considerăm numerele reale a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 cu suma nulă și cu proprietatea că $|a_i - a_j| \leq 1$, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se arate că $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \leq \frac{6}{5}$.

Problema 4. Considerăm ABC un triunghi, O centrul cercului circumscris triunghiului, H ortocentrul său și M mijlocul segmentului AH . Perpendiculara în punctul M pe dreapta OM intersectează dreptele AB și AC în punctele P , respectiv Q . Să se arate că $MP = MQ$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Al patrulea test de selecție pentru juniori
20 aprilie 2010

Problema 1. Să se determine numerele prime p, q, r cu proprietatea că:

$$p(p-7) + q(q-7) = r(r-7).$$

Problema 2. Să se arate că:

a) Există un șir de numere naturale nenule $a_1, a_2, a_3, \dots$, unic determinat, astfel încât:

$$n = \sum_{d|n} a_d, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Există un șir de numere naturale nenule $b_1, b_2, b_3, \dots$, unic determinat, astfel încât:

$$n = \prod_{d|n} b_d, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Notă. Suma de la a), respectiv produsul de la b), se fac după toți divizorii naturali d ai numărului n , inclusiv 1 și n .

Problema 3. Fie ABC un triunghi înscris în cercul (O) . Fie I centrul cercului înscris în triunghi și D punctul de contact al cercului înscris cu latura BC . Fie M cel de-al doilea punct de intersecție a bisectoarei AI cu cercul (O) și fie P punctul în care dreapta DM reține cercul (O) . Să se arate că $\angle API = 90^\circ$.

Problema 4. În plan se consideră 51 de puncte de coordonate întregi, astfel încât distanțele între orice două puncte să fie numere naturale. Să se arate că cel puțin 49% dintre distanțe sunt pare.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Al cincilea test de selecție pentru juniori
21 mai 2010

Problema 1. Fie p un număr prim, $p > 5$. Să se determine numerele naturale nenule x cu proprietatea că $5p + x$ divide $5p^n + x^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi și D, E, F mijloacele laturilor BC, CA, AB respectiv. Să se arate că $\angle DAC = \angle ABE$ dacă și numai dacă $\angle AFC = \angle BDA$.

Problema 3. Fie a, b, c numere reale cu $ab + bc + ca = 1$. Să se arate că:

$$\frac{(a+b)^2+1}{c^2+2} + \frac{(b+c)^2+1}{a^2+2} + \frac{(c+a)^2+1}{b^2+2} \geq 3.$$

Problema 4. O tablă de șah 8×8 este formată din 64 de pătrate unitate. În unele dintre pătratele unitate ale tablei se duc diagonale astfel încât oricare două diagonale să nu aibă puncte comune. Care este numărul maxim de diagonale ce pot fi trasate?

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.