



Olimpiada Națională de Matematică

Etapă Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a VIII-a

Problema 1. Se consideră numerele reale nenule a și b , astfel încât

$$3(a^6 + b^6) = a^2b^2(a^2b^2 + 9).$$

Demonstrați că cel puțin unul dintre numerele a și b este irațional.

Problema 2. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$, cu baza $ABCD$ și punctele M , N și P , mijloacele muchiilor AD , BC , respectiv VA . Demonstrați că unghiul dreptei CP cu planul (BAD) are măsura de 45° dacă și numai dacă unghiul dreptei CP cu planul (VMN) are măsura de 30° .

Gazeta Matematică

Problema 3. Determinați numerele reale x și y care verifică simultan condițiile:

- (i) $x \geq 2y^2$
- (ii) $y \geq 2x^2$
- (iii) numărul $8(x - y)$ este întreg.

Problema 4. Dacă m este un număr natural nenul, notăm cu $S(m)$ suma divizorilor naturali ai lui m , iar dacă n și p sunt numerele naturale nenule, notăm cu $C(n, p)$ suma caturilor împărțirilor lui n la divizorii naturali ai lui p (de exemplu, $C(18, 10) = 18 + 9 + 3 + 1 = 31$).

Fie a și b două numere naturale nenule.

- a) Demonstrați că, dacă $S(a) = C(a, b)$ și $S(b) = C(b, a)$, atunci $a = b$.
- b) Este totdeauna adevărat că, dacă $S(a) + S(b) = C(a, b) + C(b, a)$, atunci $a = b$?

*Timp de lucru 3 ore.**Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*