

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

CLASA a VIII-a - Subiecte

Problema 1. Demonstrați că există o infinitate de mulțimi formate din patru numere naturale nenule care au proprietatea că suma oricăror trei elemente ale mulțimii este pătrat perfect.

Problema 2. Fie a, b, c, d numere naturale astfel încât $a + b + c + d = 2018$. Aflați valoarea minimă a expresiei

$$E = (a - b)^2 + 2(a - c)^2 + 3(a - d)^2 + 4(b - c)^2 + 5(b - d)^2 + 6(c - d)^2.$$

Problema 3. Fie $a, b, c \geq 0$ astfel încât $ab + bc + ca = 3$. Demonstrați că

$$\frac{a}{a^2 + 7} + \frac{b}{b^2 + 7} + \frac{c}{c^2 + 7} \leq \frac{3}{8}.$$

Problema 4. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ notăm cu M centrul feței $ABB' A'$. Notăm cu M_1 și M_2 proiecțiile lui M pe dreptele $B' C$ și respectiv AD' . Demonstrați că:

a) $[MM_1] \equiv [MM_2]$;

b) dacă $(MM_1 M_2) \cap (ABC) = d$, atunci $d \parallel AD$;

c) $m(\angle((MM_1 M_2), (ABC))) = 45^\circ \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{BB'}{BC} + \frac{BC}{BB'}.$