

Gauss is coming

Descriere

Vlad este elev de liceu în clasa a 10-a. Pasionat atât de informatică, cât și de matematică, el decide să realizeze un program care să rezolve una dintre problemele lui preferate: rezolvarea unui sistem de ecuații liniare, oricât de mare. Astfel, ajunge să citească despre metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuații, care funcționează astfel: un sistem de forma

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

Este adus la un sistem superior triunghiular numai prin scalări și adunări/scăderi de ecuații, astfel:

$$\begin{aligned}a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\0 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\&\vdots \\0 + 0 + \dots + a'_{nn}x_n &= b'_n\end{aligned}$$

Acest sistem este foarte simplu de rezolvat, deoarece necunoscutele pot fi determinate independent, începând cu ultima (x_n) și terminând cu prima necunoscută (*substituție înapoi*).

Cu toate că este o metodă simplă, ușor de înțeles, Vlad își dă seama că uneori el poate avea probleme datorită împărțirilor la 0 ce pot apărea pe parcursul programului. De aceea, el aplică, în plus, următoarea strategie: atunci când va realiza eliminarea termenilor doriți, el va interschimba câte 2 ecuații, astfel:

- la primul pas, va interschimba ecuația 1 cu o ecuație care are coeficientul lui x_1 mai mare în modul.
- la cel de-al doilea pas, după ce s-a realizat eliminarea tuturor coeficienților lui x_1 (în afară de prima ecuație), se aduce în locul ecuației 2 pe cea care are coeficientul lui x_2 mai mare decât cel curent. La fiecare pas intermediar, se interschimbă ecuația cu o ecuație care se află sub ecuația curentă.
- în mod similar, procedeul continuă până când se ajunge la ultima ecuație.

Vlad a realizat implementarea algoritmului împreună cu strategia sa (numită **strategie de pivotare**), însă are probleme în testarea implementării. Mai exact, implementarea sa nu returnează rezultatul dorit. Ajutați-l să identifice problemele existente.

Download sursă [aici](#).

Examples

Fie următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 2 \\2x_1 + 3x_2 &= 5\end{aligned}$$

Astfel, coeficienții ecuațiilor și termenii liberi sunt memorați astfel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Pentru primul pas, realizăm operația de pivotare: comparăm pivotul (*elementul diagonal*, 1 în acest caz) cu elementele de sub el. Observăm că $1 < 2$, de aceea sistemul devine:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Facem eliminarea efectivă (realizăm $L_2 = L_2 - 0.5L_1$; cu L_i am notat liniile din matricea sistemului):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

Sistemul superior triunghiular este:

$$2x_1 + 3x_2 = 5$$

$$0x_1 - 0.5x_2 = -0.5$$

Acum rezolvăm sistemul prin substituție înapoi, astfel: determinăm x_2 din a doua ecuație și apoi îl introducem în prima ecuație.

$$x_2 = 1$$

$$2x_1 + 3 = 5$$

$$2x_1 = 2$$

$$x_1 = 1$$

Astfel, soluția sistemului este:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Note

- Se garantează că toate sistemele rezolvate au soluție unică.
- Ordinul sistemului $n \leq 100$.
- Nu aveți voie să modificați liniile marcate cu DO NOT MODIFY.