



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ o funcție surjectivă.

- a) Demonstrați că f are cel puțin un punct de discontinuitate.
- b) Arătați că, dacă f admite limită în orice punct din intervalul $[0, 1]$, atunci f are cel puțin două puncte de discontinuitate.

Problema 2. Fie $\mathcal{F}$ mulțimea perechilor de matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}^*$ și există matricele $C_1, C_2, \dots, C_k \in \{A, B\}$ astfel încât $C_1 C_2 \cdots C_k = O_2$. Pentru $(A, B) \in \mathcal{F}$, notăm $k(A, B)$ cel mai mic număr $k \in \mathbb{N}^*$ care satisface proprietatea din definiția de mai sus.

a) Fie $(A, B) \in \mathcal{F}$, astfel încât $\det(A) = 0$, $\det(B) \neq 0$ și $k(A, B) = p + 2$, cu $p \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $AB^p A = O_2$.

b) Demonstrați că pentru orice $k \geq 3$ există $(A, B) \in \mathcal{F}$ astfel încât $k(A, B) = k$.

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile în $x = 0$, care verifică inegalitatea

$$f(x + y) + f(xy) \geq f(x) + f(y),$$

pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătați că

$$\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n),$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.