

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapă Națională, Timișoara, 20 aprilie 2017**

**CLASA a 10-a**

**Problema 1.** Fie  $a \in (0, 1)$ . Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația

$$a^{[x]} + \log_a \{x\} = x.$$

**Problema 2.** Spunem că o funcție  $f : \mathbb{Q}_+^* \rightarrow \mathbb{Q}$  are proprietatea P dacă

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}_+^*.$$

- a) Demonstrați că nu există funcții injective cu proprietatea P.
- b) Există funcții surjective cu proprietatea P?

**Problema 3.** Demonstrați inegalitatea

$$\sin \frac{\pi}{4n} \geq \frac{\sqrt{2}}{2n},$$

unde  $n$  este un număr natural nenul.

**Problema 4.** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi finite. Să se determine numărul de funcții  $f : A \rightarrow A$  cu proprietatea că există două funcții  $g : A \rightarrow B$  și  $h : B \rightarrow A$  astfel încât  $g(h(x)) = x, \forall x \in B$  și  $h(g(x)) = f(x), \forall x \in A$ .