

Soluție: Problema – fence

Autor: prof. Ionel-Vasile Piț-Rada,
Colegiul Național "TRAIAN", Drobeta Turnu Severin

Variantă 1

Inițial, din fiecare valoare $a[i][j]$, se scade costul V

a) **P_arie_minima** se calculează ca suma a elementelor din matrice care nu aparțin zonelor cu colțurile diagonale:

$Zona\ NV: (1, 1) - (y_vest - 1, x_nord - 1)$

$Zona\ NE: (1, x_nord + 1) - (y_est - 1, N)$

$Zona\ SV: (y_vest + 1, 1) - (M, x_sud - 1)$

$Zona\ SE: (y_est + 1, x_sud + 1) - (M, N)$

Complexitate $O(M*N)$

b) Se calculează, pentru fiecare din cele patru zone, câte un profit maximal care, dacă va fi pozitiv, atunci se va adăuga la **P_arie_minima**, calculat ca la punctul a).

Prin transformări, precum translații, simetrii și rotații, studiul celor patru tipuri de zone se poate reduce la studiul unui singur tip.

Să analizăm de exemplu zona NE pentru care folosim notațiile

$mx = y_est - 1$, $nx = N - x_nord$ și presupunem că datele se află în matricea x cu mx linii și nx coloane.

Dorim să găsim un „gard” descrescător care pornește din dreptul poziției (1,1) și se oprește în dreptul poziției (mx,nx), pentru care suma elementelor cuprinse între „gard”, linia mx și limitate în stânga și respectiv dreapta de coloanele 1 și respectiv nx , este maximă. Este posibil ca suma maximă să fie negativă sau zero, adică zona studiată să nu aducă profit.

Proprietatea „gardului” de a fi descrescător va asigura conservarea perimetrului total egal cu $2M+2N$.

Perimetrul oricărui gard descrescător care unește (1,1) cu (mx,nx) va avea lungimea egală cu $mx+nx$ unități.

Profitul maxim specific zonei se poate calcula după cum urmează:

În linia $mx+1$ inițializăm cu 0.

Pentru fiecare $1 \leq j \leq nx$

Dacă $j=1$, atunci

Pentru fiecare $1 \leq i \leq mx+1$, începând cu $i=mx+1$

//sume parțiale pentru prima coloană

calculăm $y[i] = x[i][1] + x[i+1][1] + \dots + x[mx][1] + x[mx+1][1]$

și

//profiturile corespunzătoare coloanei 1

$z[i][1] = y[i]$;

Dacă $2 \leq j \leq nx$, atunci

Pentru fiecare $1 \leq i \leq mx+1$, începând cu $i=mx+1$

//sume parțiale pentru coloana j

calculăm $y[i] = x[i][j] + x[i+1][j] + \dots + x[mx][j] + x[mx+1][j]$

//se calculează profiturile, combinând sumele parțiale din coloana j

//cu profiturile corespunzătoare coloanelor 1, 2, ..., $j-1$, care se găsesc în

//coloana $j-1$ a matricei z

//ideea este că pentru fiecare sumă parțială $y[i]$ să găsim cea mai bună

//completare din stânga, care să conserve descrescerea traseului

//traseul propriu-zis nu va interesa ci doar suma maximă posibilă

Pentru fiecare $1 \leq i \leq mx+1$, începând cu $i=1$

calculăm $z[i][j] = y[i] + \max(z[1][j-1], z[2][j-1], \dots, z[i][j-1])$

La final profitul maximal corespunzător zonei studiate este egal cu

$\max(z[1][nx], z[2][nx], \dots, z[mx+1][nx])$

Dacă profitul maximal găsit pentru zona studiată va fi negativ, atunci acesta se va neglija în suma finală.

Complexitate: $O(M*N)$

Variantă 2

O soluție cu backtracking ar putea lua maxim 30 puncte.