



Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2011. március 12.

X. OSZTÁLY

1. feladat. Adottak az a, b, c szigorúan pozitív valós számok. Igazold, hogy az

$$a^x + b^x = c^x$$

egyenletnek legfeljebb egy megoldása van!

2. feladat. a) A z_1, z_2, z_3, z_4 különböző komplex számok összege 0 és modulusaik egyenlők. Igazold, hogy a z_1, z_2, z_3, z_4 affixumú pontok egy téglalap csúcsai!

b) Az x, y, z, t valós számokra fennállnak a

$$\sin x + \sin y + \sin z + \sin t = 0 \text{ és } \cos x + \cos y + \cos z + \cos t = 0$$

egyenlőségek. Igazold, hogy minden n egész szám esetén

$$\sin(2n+1)x + \sin(2n+1)y + \sin(2n+1)z + \sin(2n+1)t = 0.$$

3. feladat. Ha a és b komplex számok, igazold, hogy a következő állítások egyenértékűek:

A₁) Az $x^2 - ax + b = 0$ egyenlet komplex megoldásainak modulusai rendre egyenlőek az $x^2 - bx + a = 0$ egyenlet komplex megoldásainak modulusaival!

A₂) $a^3 = b^3$ vagy $b = \bar{a}$.

4. feladat. a) Igazold, hogy az $a, b > 1$ különböző valós számok esetén

$$\log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b).$$

b) Igazold, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ és $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1$ valós számok, akkor

$$\log_{a_1}(\log_{a_1} a_2) + \log_{a_2}(\log_{a_2} a_3) + \dots + \log_{a_{n-1}}(\log_{a_{n-1}} a_n) + \log_{a_n}(\log_{a_n} a_1) > 0.$$