

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

CLASA a IX-a

Problema 1. Arătați că dacă într-un triunghi ortocentrul H , centrul de greutate G și centrul I al cercului înscris sunt coliniare, atunci triunghiul este isoscel.

Problema 2. Demonstrați că, dacă $a, b, c \geq 0$ și $a + b + c = 3$, atunci

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} \geq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}.$$

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții de gradul 2 cu proprietatea: pentru orice număr real r , dacă $f(r)$ este număr întreg, atunci și $g(r)$ este număr întreg.

Demonstrați că există două numere întregi m și n astfel încât $g(x) = mf(x) + n$, oricare ar fi numărul real x .

Problema 4. Considerăm un număr natural nenul n , un cerc de lungime $6n$ și $3n$ puncte care împart cercul în $3n$ arce mici, astfel încât n dintre aceste arce au lungimea 1, alte n dintre aceste arce au lungimea 2, iar cele n arce rămase au lungimea 3.

Arătați că printre punctele considerate există două care sunt diametral opuse.