

Olimpiada Națională de Matematică
Primul baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori,
Deva, 25 aprilie 2019

Problema 1. Fie n un număr natural nenul dat. Determinați toți divizorii (pozitivi) d ai lui $3n^2$ pentru care $n^2 + d$ este pătrat perfect.

Cristinel Mortici

Soluția 1:

Dacă d divide $3n^2$, atunci există $k, m \in \mathbb{N}$ astfel încât $3n^2 = d \cdot k$ și $n^2 + d = m^2$. Atunci $n^2 = \frac{3n^2}{k} = m^2$, deci $(mk)^2 = n^2(k^2 + 3k)$. De aici deducem că $k^2 + 3k$ este pătrat perfect.

Dar $k^2 < k^2 + 3k < (k + 2)^2$, deci $k^2 + 3k = (k + 1)^2$, de unde $k = 1$ și $d = 3n^2$.

Reciproc, pentru $d = 3n^2$ avem că $n^2 + d = (2n)^2$ este într-adevăr pătrat perfect.

Soluția 2:

Fie d un divizor al lui $3n^2$ pentru care $n^2 + d = m^2$. Atunci $m > n$ și $d = (m - n)(m + n)$. Dacă notăm cu $D = (m, n)$ atunci există $a, b \in \mathbb{N}$ astfel ca $m = Da$, $n = Db$, cu $a > b$, $(a, b) = 1$. Atunci condiția $(m - n)(m + n) \mid 3n^2$ devine $(a - b)(a + b) \mid 3b^2$. Dar $(a, b) = 1$ implică $(a + b, b) = 1$ și $(a - b, b) = 1$, deci $(a - b)(a + b) \mid 3$. Cazul $(a - b)(a + b) = 1$ conduce la $a - b = a + b = 1$, deci la $b = 0$, ceea ce nu convine. Rămâne că $a - b = 1$, $a + b = 3$, deci $a = 2$, $b = 1$, adică $m = 2n$. De aici rezultă $d = (2n)^2 - n^2 = 3n^2$.

Problema 2. Aflați valoarea maximă pe care o ia expresia

$$E(a, b) = \frac{a + b}{(4a^2 + 3)(4b^2 + 3)}$$

atunci când $a, b \in \mathbb{R}$.

Marius Stănean

Soluția 1:

Vom arăta că valoarea maximă este $\frac{1}{16}$, valoare care se atinge pentru $a = b = \frac{1}{2}$.

Inegalitatea $E(a, b) \leq \frac{1}{16}$ este echivalentă cu $16(a + b) \leq (4a^2 + 3)(4b^2 + 3)$, inegalitate care se poate scrie $(4ab - 1)^2 + 4(a + b - 1)^2 + 2(2a - 1)^2 + 2(2b - 1)^2 \geq 0$ și este, ca atare, evidentă.

Remarcă: Inegalitatea $16(a + b) \leq (4a^2 + 3)(4b^2 + 3)$ se poate rescrie $a^2(16b^2 + 12) - 16a + (12b^2 - 16b + 9) \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ și se poate demonstra privind expresia de mai sus ca pe o funcție de gradul al doilea în a .

Soluția 2:

Vom arăta că valoarea maximă este $\frac{1}{16}$, valoare care se atinge pentru $a = b = \frac{1}{2}$.

Avem $a + b \leq \frac{(1 + a + b)^2}{4}$ (echivalentă cu $(a + b - 1)^2 \geq 0$).

Din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz avem $(4a^2 + 3)(4b^2 + 3) = (4a^2 + 1 + 2)(1 + 4b^2 + 2) \geq (2a + 2b + 2)^2$.

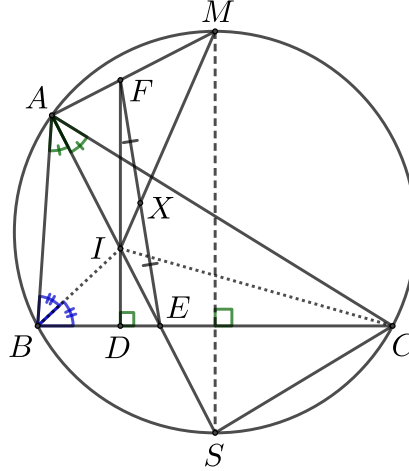
Combinând cele două inegalități de mai sus și folosind că $(4a^2 + 3)(4b^2 + 3) > 0$, obținem

$$\frac{a + b}{(4a^2 + 3)(4b^2 + 3)} \leq \frac{(a + b + 1)^2}{4(4a^2 + 3)(4b^2 + 3)} \leq \frac{(a + b + 1)^2}{4(2a + 2b + 2)^2} = \frac{1}{16}.$$

Problema 3. Fie ABC un triunghi, I centrul cercului său înscris, D punctul de contact al cercului înscris cu latura BC , iar E piciorul bisectoarei din A . Dacă M este mijlocul arcului BC care îl conține pe A al cercului circumscris triunghiului ABC și $\{F\} = DI \cap AM$, demonstrați că dreapta MI trece prin mijlocul segmentului $[EF]$.

Alexandru Gîrban

Soluție:



Se știe că bisectoarea unghiului $\hat{A}$ intersectează cercul circumscris în mijlocul arcului BC care nu conține punctul A . Notăm acest punct cu S . Atunci MS este mediatoarea segmentului $[BC]$, deci $MS \parallel ID$ (ambele sunt perpendiculare pe BC). De asemenea, $\angle ASC \equiv \angle ABC$ și $\angle SAC \equiv \angle BAE$ arată că triunghiurile SAC și BAE sunt asemenea.

Deducem că $\frac{AB}{BE} = \frac{AS}{SC}$. Din teorema bisectoarei, $\frac{AB}{BE} = \frac{AI}{IE}$. Se știe că $SI = SC$

(rezultă dintr-un calcul de unghiuri în triunghiul SCI). Atunci $\frac{AS}{SC} = \frac{AS}{SI} = \frac{AM}{MF}$. Com-

binând egalitățile de mai sus rezultă că $\frac{AI}{IE} = \frac{AM}{MF}$. În fine, din teorema lui Menelaus

aplicată pentru triunghiul AEF tăiat de transversala $I - X - M$ (unde $\{X\} = IM \cap EF$) rezultă $\frac{AI}{IE} \cdot \frac{EX}{XF} \cdot \frac{MF}{MA} = 1$ și, folosind egalitatea precedentă, obținem că $\frac{EX}{XF} = 1$, de unde concluzia.

Problema 4. Ana și Bogdan joacă următorul joc: la început, pe masă se află o grămadă formată din n ($n \geq 3$) pietricele. Cei doi jucători mută alternativ, prima mutând Ana. La o mutare, jucătorul aflat la mutare împarte una din grămezile de pietricele aflate pe masă în două grămezi mai mici, nu neapărat egale. Câștigă jucătorul care, prin mutarea sa, face ca toate grămezile aflate pe masă să conțină cel mult două pietricele. În funcție de valorile lui n , stabiliți care din cei doi jucători are strategie câștigătoare.

Soluție:

Ana câștigă dacă $n = 3$ sau dacă n este par; Bogdan câștigă dacă $n > 3$ este impar.

Dacă n este impar, $n > 3$, strategia lui Bogdan este următoarea: el lasă mereu pe masă numai grămezi cu un număr impar de pietricele. Atunci, inclusiv la prima ei mutare, Ana va împărți o asemenea grămadă în două, una având un număr par de pietricele, cealaltă un număr impar. Bogdan va împărți grămada cu un număr par în două grămezi cu un număr impar de pietricele.

Bogdan va proceda conform acestei strategii până când ajunge la mutare într-una din situațiile:

A: pe masă se află o grămadă cu 4 pietricele și restul cu una, caz în care Bogdan câștigă împărțind grămada de 4 în două de 2,

B: pe masă se află o grămadă de 3, una de 2, restul de 1, caz în care Bogdan câștigă împărțind grămada de 3 într-una de 2 și una de 1.

Dacă $n = 3$ sau $n = 4$ este evident că Ana câștigă.

Dacă $n \geq 6$ este par, Ana împarte grămada de pe masă într-una de 1 și una de $n - 1$.

Cum $n - 1 \geq 5$ este impar, primul jucător (care este de-acum Bogdan), va pierde.

Alternativ, Ana împarte grămada în două grămezi egale, iar apoi, orice ar muta Bogdan într-una din grămezi (sau ulterior într-o grămadă provenită din aceasta), Ana mută același lucru în cealaltă grămadă.

Olimpiada Națională de Matematică
Al doilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru
Juniori, București, 15 mai 2019

Problema 1. Determinați numerele naturale nenule a și b , cu $(a, b) = 1$, care verifică relația $a^2 + b = (a - b)^3$.

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$ și A o mulțime formată din $8n + 1$ numere naturale nenule, prime cu 6 și mai mici decât $30n$. Demonstrați că există $a, b \in A$ astfel încât a divide b .

Problema 3. Un cerc cu centrul în O este tangent interior la două cercuri secante situate în interiorul său. Dacă S și T sunt punctele de tangență, iar M și N sunt punctele de intersecție a celor două cercuri, cu N situat mai aproape de dreapta ST decât M , demonstrați că dreptele OM și MN sunt perpendiculare dacă și numai dacă punctele S , N și T sunt coliniare.

Problema 4. Fie a, b două numere reale pozitive astfel încât $3(a^2 + b^2 - 1) = 4(a + b)$. Găsiți valoarea minimă a expresiei

$$\frac{16}{a} + \frac{1}{b}.$$

Timp de lucru: 4 ore

Olimpiada Națională de Matematică
Al doilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru
Juniori, București, 15 mai 2019

Problema 1. Determinați numerele naturale nenule a și b , cu $(a, b) = 1$, care verifică relația $a^2 + b = (a - b)^3$.

Lucian Petrescu și Mircea Fianu

Soluția 1:

Fie $c = a - b$. Evident, $c \in \mathbb{Z}$, $c \geq 2$. Atunci $a = b + c$, deci ecuația din enunț se scrie $(b + c)^2 + b = c^3$. Deducem că c divide $b^2 + b = b(b + 1)$ și, cum $(b, c) = 1$, obținem că c divide $b + 1$. Pe de altă parte, b divide $c^3 - c^2 = c^2(c - 1)$, deci b divide $c - 1 > 0$. Avem așadar $c \leq b + 1$ și $b \leq c - 1$, deci $b = c - 1$. Revenind la ecuația $(b + c)^2 + b = c^3$, obținem că $4c^2 - 3c = c^3$, adică $c(c - 1)(c - 3) = 0$. Cum $c \geq 2$, rezultă $c = 3$, $b = 2$, $a = 5$, numere care satisfac într-adevăr condițiile din enunț.

Soluția 2:

Avem $a^2 + b = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, de unde a divide $b^3 + b = b(b^2 + 1)$ și b divide $a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$. Cum $(a, b) = 1$, rezultă $a \mid b^2 + 1$ și $b \mid a - 1$. Fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $a - 1 = kb$. Atunci $a = kb + 1$ îl divide pe $b^2 + 1$, deci și pe $k(b^2 + 1) - b(kb + 1)$, adică pe $k - b$. Cum $kb + 1 > |k - b|$, rezultă $k - b = 0$, deci $a = b^2 + 1$. Substituind în ecuația inițială se obține după calcule ecuația $b(b^5 - 3b^4 + 5b^3 - 7b^2 + 4b - 4) = 0$. Din condiția $b^5 - 3b^4 + 5b^3 - 7b^2 + 4b - 4 = 0$ rezultă $b \mid 4$, iar verificând $b = 1$, $b = 2$, $b = 4$ se obține $b = 2$ unica soluție. Rezultă $a = b^2 + 1 = 5$.

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$ și A o mulțime formată din $8n + 1$ numere naturale nenule, prime cu 6 și mai mici decât $30n$. Demonstrați că există $a, b \in A$ astfel încât a divide b .

Cristinel Mortici

Soluție:

În mulțimea $\{1, 2, \dots, 30n\}$ sunt $10n$ numere prime cu 30.

Într-adevăr, dacă $A_1 = \{1 \leq x \leq 30n \mid 2 \text{ divide } x\}$, $A_2 = \{1 \leq x \leq 30n \mid 3 \text{ divide } x\}$, $A_3 = \{1 \leq x \leq 30n \mid 5 \text{ divide } x\}$, atunci $A = \{1, 2, \dots, 30n\} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, deci $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 15n + 10n + 6n - 5n - 3n - 2n + n = 22n$, apoi $\text{card } A = 30n - 22n = 8n$. (Altfel: sunt câte n numere care dau fiecare din resturile 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 la împărțirea cu 30.)

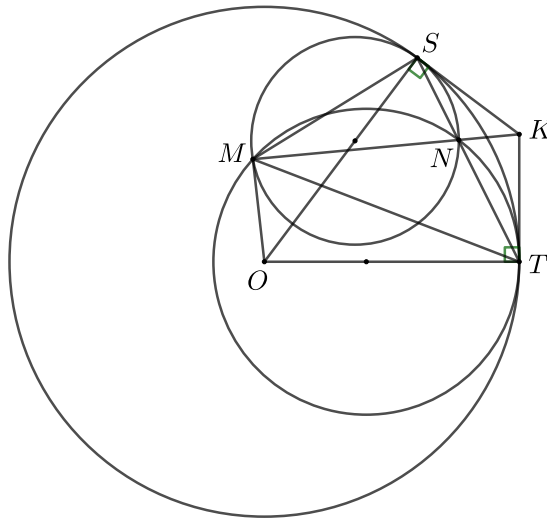
Fiecare $x \in A$ se poate scrie $5^\alpha \cdot x_0$, unde $(x_0, 30) = 1$. Cum A conține $8n + 1$ elemente, există $a, b \in A$ astfel încât $a = 5^p a_0$, $b = 5^q b_0$ cu $a_0 = b_0$. Atunci $a \mid b$ sau $b \mid a$.

Problema 3. Un cerc cu centrul în O este tangent interior la două cercuri secante situate în interiorul său. Dacă S și T sunt punctele de tangență, iar M și N sunt punctele de intersecție a celor două cercuri, cu N situat mai aproape de dreapta ST decât M , demonstrați că dreptele OM și MN sunt perpendiculare dacă și numai dacă punctele S , N și T sunt coliniare.

Soluție:

Tangentele în S și T la cercul mare se intersectează într-un punct K . Atunci patrulaterul $KSOT$ este inscriptibil. De asemenea, $KS = KT$ și, cum KS și KT sunt tangente și cercurilor mici, punctul K are aceeași putere față de cele două cercuri. Atunci K se află pe axa radicală a celor două cercuri, adică $K \in MN$. Din $KS^2 = KN \cdot KM$ rezultă că triunghiurile KSN și KMS sunt asemenea, deci $\angle KNS \equiv \angle KSM$. Analog rezultă că $\angle KNT \equiv \angle KTM$. Atunci:

$$\begin{aligned} S, N, T\text{-coliniare} &\Leftrightarrow m(\angle KNS) + m(\angle KNT) = 180^\circ \Leftrightarrow \\ m(\angle KSM) + m(\angle KTM) &= 180^\circ \Leftrightarrow SMTK\text{-inscriptibil} \Leftrightarrow \\ O, M, S, T, K\text{-conciclice} &\Leftrightarrow m(\angle OMK) = 90^\circ \Leftrightarrow OM \perp MN. \end{aligned}$$



Problema 4. Fie a, b două numere reale pozitive astfel încât $3(a^2 + b^2 - 1) = 4(a + b)$. Găsiți valoarea minimă a expresiei

$$\frac{16}{a} + \frac{1}{b}.$$

Marius Stănean

Soluție:

Să observă mai întâi că valoarea minimă a expresiei se obține atunci când $a \geq b$. Folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz, putem scrie următoarele

$$\frac{16}{a} + \frac{1}{b} = \frac{8^2}{4a} + \frac{1}{b} \geq \frac{(8+1)^2}{4a+b} = \frac{81}{4a+b}, \quad (1)$$

cu egalitate atunci când $a = 2, b = 1$, valori care verifică și condiția din ipoteză. Pe de altă parte, relația din ipoteză poate fi scrisă succesiv

$$9(a^2 + b^2 - 1) = 12(a + b),$$

$$(3a - 2)^2 + (3b - 2)^2 = 17.$$

Folosind din nou inegalitatea Cauchy-Schwarz, putem scrie

$$[(3a - 2)^2 + (3b - 2)^2] (4^2 + 1^2) \geq [4(3a - 2) + 3b - 2]^2,$$

sau

$$(12a + 3b - 10)^2 \leq 17^2,$$

iar de aici

$$4a + b \leq 9.$$

Prin urmare revenind la (1), rezultă că

$$\frac{16}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{81}{4a+b} \geq 9.$$

Egalitatea se obține dacă și numai dacă $a = 2, b = 1$.

Observație: Inegalitatea $4a + b \leq 9$ poate fi demonstrată și astfel: condiția din enunț se poate scrie ca o ecuație de gradul II în variabila b , $3b^2 - 4b + (3a^2 - 4a - 3) = 0$. Condiția de existență a lui b , anume $\Delta \geq 0$, revine la $9a^2 - 12a - 13 \leq 0$, deci la $a < \frac{2 + \sqrt{17}}{3}$. Revenind la ecuația de gradul II, obținem că $b = \frac{2 \pm \sqrt{13 + 12a - 9a^2}}{3} \leq \frac{2 + \sqrt{13 + 12a - 9a^2}}{3} \leq 9 - 4a$. Ultima inegalitate este echivalentă cu $\sqrt{13 + 12a - 9a^2} \leq 25 - 12a$. Se vede ușor că $a < \frac{2 + \sqrt{17}}{3} \Rightarrow 25 - 12a > 0$ și atunci inegalitatea anterioară revine la $13 + 12a - 9a^2 \leq (25 - 12a)^2$ și apoi la $153(a - 2)^2 \geq 0$, inegalitate evidentă, satisfăcută cu egalitate dacă $a = 2$.

Olimpiada Națională de Matematică
Al treilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru
Juniori, București, 17 mai 2019

Problema 1. Determinați toate numerele naturale k pentru care există numerele naturale n și m , $m \geq 2$, astfel ca $3^k + 5^k = n^m$.

Problema 2. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ascuțitunghic ABC în care $m(\angle B) < m(\angle C)$. Dreapta AO intersectează latura BC în D . Fie E și F centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD , respectiv ACD . Pe prelungirile laturilor $[AB]$ și $[AC]$, dincolo de A , se consideră punctele G , respectiv H astfel încât $AG = AC$ și $AH = AB$. Demonstrați că patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi dacă și numai dacă $m(\angle ACB) - m(\angle ABC) = 60^\circ$.

Problema 3. Fie a, b, c, d numere reale satisfăcând condițiile $|a|, |b|, |c|, |d| > 1$ și $abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0$. Demonstrați că

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

Problema 4. Pătrățelele unitate ale unui dreptunghi $1 \times (2n + 1)$ se colorează cu alb sau cu negru. Spunem că un pătrățel este echilibrat dacă suma dintre numărul pătrățelelor albe situate la stânga sa și numărul de pătrățele negre situate la dreapta sa este n .

Arătați că există un număr impar de pătrățele echilibrate.

Olimpiada Națională de Matematică
Al treilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru
Juniori, București, 17 mai 2019

Problema 1. Determinați toate numerele naturale k pentru care există numerele naturale n și m , $m \geq 2$, astfel ca $3^k + 5^k = n^m$.

Soluție:

Evident $k = 1$ are proprietatea cerută: $3^1 + 5^1 = 2^3$. Vom demonstra că celelalte numere naturale nu au această proprietate.

Să observăm că $k = 0$ nu convine și că, dacă $k > 0$ este par, atunci $3^k \equiv 5^k \equiv 1 \pmod{4}$, deci $3^k + 5^k \equiv 2 \pmod{4}$. Așadar exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a lui $3^k + 5^k$ este 1, iar exponentul lui 2 în descompunerea lui n^m trebuie să fie un multiplu de m . Prin urmare, k nu poate fi număr par.

Pentru $k > 1$ impar, putem scrie $3^k + 5^k = (3 + 5)(3^{k-1} - 3^{k-2} \cdot 5 + \dots + 5^{k-1})$. În paranteza a doua avem o sumă cu un număr impar de termeni impari, deci un număr impar. Exponentul lui 2 în descompunerea lui $3^k + 5^k$ fiind 3, trebuie ca $m = 3$.

Observăm că $3^k \equiv 0 \pmod{9}$ și că m^3 , un cub perfect, poate fi congruent numai cu $-1, 0, 1$ modulo 9. Deoarece $5^k \equiv 5 \pmod{9}$ dacă $k \equiv 1 \pmod{6}$, $5^k \equiv -1$ dacă $k \equiv 3 \pmod{6}$ și $5^k \equiv 3 \pmod{9}$ dacă $k \equiv 5 \pmod{6}$, deducem că singura posibilitate este $k \equiv 3 \pmod{6}$, adică k să fie multiplu de 3.

Am ajuns astfel la o ecuație de forma $x^3 + y^3 = z^3$, $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, ecuație despre care se știe că nu are soluții. (Se poate invoca Marea teoremă a lui Fermat).

Alternativ, o analiză modulo 7 arată că $3^k + 5^k \equiv 5 \pmod{7}$ dacă $k \equiv 3 \pmod{6}$, în vreme ce, se știe și se arată ușor, un cub perfect poate fi congruent numai cu $-1, 0$ sau 1 modulo 7.

Problema 2. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ascuțitunghic ABC în care $m(\angle B) < m(\angle C)$. Dreapta AO intersectează latura BC în D . Fie E și F centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD , respectiv ACD . Pe prelungirile laturilor $[AB]$ și $[AC]$, dincolo de A , se consideră punctele G , respectiv H astfel încât $AG = AC$ și $AH = AB$. Demonstrați că patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi dacă și numai dacă $m(\angle ACB) - m(\angle ABC) = 60^\circ$.

Hojoo Lee, Short List IMO 2004

Soluție:

Evident, $EF \perp AD$. Totodată, $m(\angle BAO) = 90^\circ - m(\angle C) = 90^\circ - m(\angle AGH)$, deci $AD \perp GH$. Așadar, $EF \parallel GH$.

Pe de altă parte, $m(\angle ADC) = m(\angle B) + m(\angle BAD) = 90^\circ - m(\angle C) + m(\angle B) < 90^\circ$, deci triunghiul ADC este ascuțitunghic, prin urmare $F \in \text{int}(\angle DAC)$. Unghiul

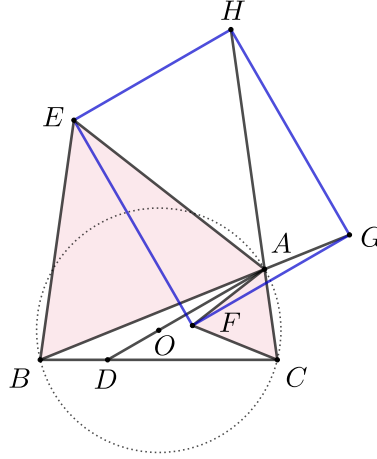
$\angle ADB$ este obtuz, deci $B \in \text{int}(\angle EAD)$.

Se vede ușor că $m(\angle AFC) = 2m(\angle ADC) = m(\angle AEB)$. Triunghiurile AFC și AEB sunt isoscele cu unghiuri congruente în vârf, deci sunt asemenea. Rezultă

că $m(\angle EAF) = m(\angle A)$ și $\frac{EA}{AB} = \frac{FA}{AC}$, deci și triunghiurile AEF și ABC sunt asemenea.

Atunci $EFGH$ este paralelogram dacă și numai dacă $EF = GH$, adică dacă și numai dacă triunghiurile AEF și ABC sunt congruente. Acest lucru este echivalent cu triunghiurile ABE și ACF sunt echilaterale, adică cu faptul că $m(\angle ADC) = 30^\circ$, ceea ce este echivalent cu $m(\angle ACB) - m(\angle ABC) = 60^\circ$.

Mai rămâne să arătăm că, în situația de mai sus, $EFGH$ este chiar dreptunghi. $AE = AB = AH$ și $AF = AC = AG$ arată că în paralelogramul $EFGH$ diagonalele a două laturi opuse se intersectează, ceea ce arată că paralelogramul este dreptunghi.



Problema 3. Fie a, b, c, d numere reale satisfăcând condițiile $|a|, |b|, |c|, |d| > 1$ și $abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0$. Demonstrați că

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

Soluție:

Condiția e echivalentă cu $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) = (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$, adică $\frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{b+1}{b-1} \cdot \frac{c+1}{c-1} \cdot \frac{d+1}{d-1} = 1$. Din inegalitatea mediilor rezultă atunci că

$$\frac{2}{a-1} + \frac{2}{b-1} + \frac{2}{c-1} + \frac{2}{d-1} = \frac{a+1}{a-1} - 1 + \frac{b+1}{b-1} - 1 + \frac{c+1}{c-1} - 1 + \frac{d+1}{d-1} - 1 \geq$$

$$4\sqrt[4]{\frac{a+1}{a-1} \cdot \frac{b+1}{b-1} \cdot \frac{c+1}{c-1} \cdot \frac{d+1}{d-1}} - 4 = 0.$$

Egalitate am avem dacă $\frac{a+1}{a-1} = \frac{b+1}{b-1} = \frac{c+1}{c-1} = \frac{d+1}{d-1}$ și $abc + abd + acd +$

$bcd + a + b + c + d = 0$, adică pentru $a = b = c = d$, deci $4a^3 + 4a = 0$, în fine $a = b = c = d = 0$ care însă nu verifică $|a|, |b|, |c|, |d| > 1$.

Așadar inegalitatea este strictă.

Problema 4. Pătrățelele unitate ale unui dreptunghi $1 \times (2n + 1)$ se colorează cu alb sau cu negru. Spunem că un pătrățel este echilibrat dacă suma dintre numărul pătrățelelor albe situate la stânga sa și numărul de pătrățele negre situate la dreapta sa este n .

Arătați că există un număr impar de pătrățele echilibrate.

Olimpiadă Spania, 2018

Soluție:

Definim scorul fiecărui pătrățel ca fiind suma dintre numărul pătrățelelor albe situate la stânga sa și numărul de pătrățele negre situate la dreapta sa. Așadar, un pătrățel este echilibrat dacă are scorul n . Se vede ușor că două pătrățele vecine au același scor dacă și numai dacă nu sunt la fel colorate.

De aici se poate continua în cel puțin două feluri: (notăm A = pătrățel alb, N = pătrățel negru)

- fie eliminăm toate perechile formate de două pătrățele vecine de culori diferite,
- fie intervertim mereu grupurile AN (până ce pătrățelele negre ajung toate la început).

- Dacă le eliminăm, scorul fiecăruia din pătrățelele celelalte scade cu 1. Cele două pătrățele scoase, fie erau ambele echilibrate, fie niciuna; dintre celelalte pătrățele, cele care erau echilibrate rămân echilibrate (le scade scorul cu 1 dar și n scade cu 1). Prin urmare, paritatea numărului de pătrățele echilibrate nu se schimbă.

După k asemenea operații am eliminat $2k$ pătrățele și am rămas cu $2n - 2k + 1$ pătrățele de aceeași culoare. Scorurile acestora sunt $0, 1, 2, \dots, 2n - 2k$ (de la stânga la dreapta sau de la dreapta spre stânga în funcție de culoarea pătrățelelor rămase). Printre scorurile celor $2(n - k) + 1$ pătrățele rămase, $n - k$ apare exact o dată, deci la sfârșit există un singur pătrățel echilibrat. Prin urmare numărul pătrățelelor echilibrate a fost mereu impar.

- Dacă le intervertesc, scorurile celorlalte pătrățele nu se schimbă, iar cele două pătrățele intervertite vor avea în continuare scoruri egale, deci paritatea numărului de bile echilibrate nu s-a schimbat. Intervertim până ajungem la configurația în care avem toate pătrățelele negre în față (în stânga) urmate de cele albe. Dacă avem k negre și $2n + 1 - k$ albe, scorurile sunt, în ordine, $k - 1, k - 2, \dots, 1, 0, 0, 1, \dots, 2n - k$. În această listă numărul n apare exact o dată, deci numărul pătrățelelor echilibrate a fost mereu impar.

Olimpiada Națională de Matematică
Al patrulea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru
Juniori, București, 29 mai 2019

Problema 1. Pentru un număr natural nenul m notăm cu $\tau(m)$ numărul divizorilor săi pozitivi, iar cu $\sigma(m)$ suma acestora.
Determinați numerele naturale nenule n pentru care

$$n\sqrt{\tau(n)} \leq \sigma(n).$$

Problema 2. Fie $a, b, c, d \geq 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Demonstrați că

$$\frac{a + b + c + d}{2} \geq 1 + \sqrt{abcd}.$$

Când are loc egalitatea?

Problema 3. În triunghiul ascuțitunghic ABC punctul I este centrul cercului înscris, O este centrul cercului circumscris, iar I_a este centrul cercului exînscriș tangent laturii $[BC]$. Punctul A' este simetricul vârfului A față de dreapta BC . Demonstrați că unghiurile $\angle IOI_a$ și $\angle IA'I_a$ sunt congruente.

Problema 4. Pe un cerc se scriu numerele de la 1 la 100 într-o anumită ordine. Spunem despre o pereche de numere de pe cerc că este *bună* dacă cele două nu sunt vecine și dacă pe cel puțin unul din cele două arce de cerc pe care ele le determină se află numai numere mai mici decât fiecare din ele. Cât poate fi numărul total de perechi bune?

Timp de lucru: 4 ore

Olimpiada Națională de Matematică
Al patrulea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru
Juniori, București, 29 mai 2019

Problema 1. Pentru un număr natural nenul m notăm cu $\tau(m)$ numărul divizorilor săi pozitivi, iar cu $\sigma(m)$ suma acestora.

Determinați numerele naturale nenule n pentru care

$$n\sqrt{\tau(n)} \leq \sigma(n).$$

Vlad Mihaly

Soluție:

Se verifică ușor că inegalitatea este satisfăcută de orice $n \in \{1, 2, 4, 6\}$ și nu este satisfăcută de niciun $n \in \{3, 5\}$. Egalitate avem pentru $n = 1$ și $n = 6$. Demonstrăm că inegalitatea nu este satisfăcută de niciun n mai mare. Este ușor de văzut că $\tau(a \cdot b) = \tau(a) \cdot \tau(b)$ și $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$ cu $(a, b) = 1$. De aici se vede că dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ cu $(a, b) = 1$ nu sunt soluții ale inecuației din enunț, atunci nici produsul lor nu este soluție. Vom demonstra că 2^k nu este soluție pentru niciun $k > 3$, că p^k , $2p^k$ și $4p^k$ nu sunt soluții pentru niciun p prim, $p > 2$ și niciun $k > 0$. Va rezulta că inecuația din enunț nu are alte soluții în afara celor patru amintite.

• $2^k \sqrt{\tau(2^k)} > \sigma(2^k) \Leftrightarrow 2^k \sqrt{k+1} > 2^{k+1} - 1$ rezultă de îndată ce $\sqrt{k+1} \geq 2$, deci pentru orice $k \geq 3$.

• $p^k \sqrt{\tau(p^k)} > \sigma(p^k) \Leftrightarrow p^k \sqrt{k+1}(p-1) > p^{k+1} - 1$. Ori $p^k \sqrt{k+1}(p-1) \geq p^k(p-1)\sqrt{2} > p^{k+1} > p^{k+1} - 1$, inegalitatea din mijloc fiind echivalentă cu $p > \sqrt{2} + 2$, deci adevărată pentru orice $p \geq 3$.

• $2p^k \sqrt{\tau(2p^k)} > \sigma(2p^k) \Leftrightarrow 2p^k \sqrt{2(k+1)}(p-1) > 3(p^{k+1} - 1)$.

Ori $2p^k \sqrt{2(k+1)}(p-1) \geq 4p^k(p-1) > 3p^{k+1} > 3(p^{k+1} - 1)$, inegalitatea din mijloc fiind echivalentă cu $p > 4$, deci adevărată pentru orice $p \geq 5$. De asemenea, dacă $p = 3$, atunci $k \geq 2$, deci inegalitatea de demonstrat, $4 \cdot 3^k \sqrt{2(k+1)} > 3(3^{k+1} - 1)$, rezultă din $4 \cdot 3^k \sqrt{2(k+1)} \geq 4\sqrt{6} \cdot 3^k > 3^{k+2} > 3(3^{k+1} - 1)$.

• $4p^k \sqrt{\tau(4p^k)} > \sigma(4p^k) \Leftrightarrow 4p^k \sqrt{3(k+1)}(p-1) > 7(p^{k+1} - 1)$.

Dar $4p^k \sqrt{3(k+1)}(p-1) \geq 4\sqrt{6}p^k(p-1) > 7p^{k+1} > 7(p^{k+1} - 1)$, inegalitatea din mijloc rezultând din $4\sqrt{6}(p-1) > 7p$, adevărată pentru orice $p \geq 5$. Pentru $p = 3$, inegalitatea $8 \cdot 3^k \sqrt{3(k+1)} > 7(3^{k+1} - 1)$ rezultă din $8 \cdot 3^k \sqrt{3(k+1)} > 7 \cdot 3^{k+1} \Leftrightarrow 8\sqrt{3(k+1)} > 21$, adevărată pentru $k \geq 2$. Pentru $p = 3$, $k = 1$ se verifică direct că $n = 12$ nu este soluție.

Problema 2. Fie $a, b, c, d \geq 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Demonstrați că

$$\frac{a + b + c + d}{2} \geq 1 + \sqrt{abcd}.$$

Când are loc egalitatea?

Leonard Giugiuc și Valmir B. Krasniqi

Soluția 1:

Avem $ab + cd \geq 2\sqrt{abcd}$, $ac + bd \geq 2\sqrt{abcd}$ și $ad + bc \geq 2\sqrt{abcd}$, deci $ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 6\sqrt{abcd}$, deci este suficient să demonstrăm că

$$\frac{a + b + c + d}{2} \geq 1 + \frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}.$$

Dar $ab + ac + ad + bc + bd + cd = \frac{(a + b + c + d)^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2}{2} = 2p^2 - 2$,

unde am notat cu $p = \frac{a + b + c + d}{2}$. Din relația de mai sus este evident că $p \geq 1$, iar din inegalitatea dintre media aritmetică și cea pătratică, $p \leq 2$. Este suficient să demonstrăm că $p \geq 1 + \frac{p^2 - 1}{3}$, adică $p^2 - 3p + 2 \leq 0$, sau $(p - 1)(p - 2) \leq 0$, ceea ce este evident. Egalitate avem dacă $p = 2$, adică avem egalitate în inegalitatea dintre media aritmetică și cea pătratică, deci pentru $a = b = c = d = 1$ sau dacă $p = 1$, ceea ce înseamnă $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$, adică trei dintre variabile egale cu 0 și cea de-a patra egală cu 2.

Soluția 2:

Prin ridicare la pătrat, inegalitatea se rescrie echivalent $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \geq 4 + 8\sqrt{abcd} + 4abcd$, adică $ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 4\sqrt{abcd} + 2abcd$. Din inegalitatea mediilor, $4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = 4\sqrt{abcd}$, de unde $abcd \leq 1$. Tot din inegalitatea mediilor, $ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 6\sqrt{abcd} = 4\sqrt{abcd} + 2\sqrt{abcd} \geq 4\sqrt{abcd} + 2abcd$.

Egalitate avem dacă $ab = ac = ad = bc = bd = cd$, adică atunci când $a = b = c = d = 1$ sau trei dintre variabile sunt 0 (și atunci cea de-a patra este 2).

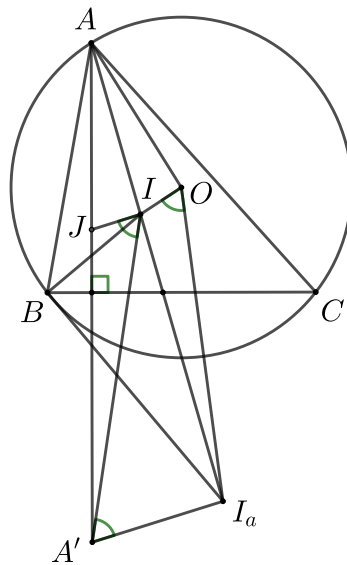
Problema 3. În triunghiul ascuțitunghic ABC punctul I este centrul cercului înscris, O este centrul cercului circumscris, iar I_a este centrul cercului exînscrip tangente laturii $[BC]$. Punctul A' este simetricul vârfului A față de dreapta BC . Demonstrați că unghiurile $\angle IOI_a$ și $\angle IAI_a$ sunt congruente.

Soluție:

Patrulaterul IBI_aC este inscriptibil, deci $\angle AI_aC \equiv \angle IBC \equiv \angle ABI$ și, cum $\angle BAI \equiv \angle I_aAC$, rezultă că triunghiurile ABI și AI_aC sunt asemenea (UU).

Rezultă că $AI \cdot AI_a = AB \cdot AC$. Pe de altă parte, $AB \cdot AC = \frac{2S}{\sin A} = \frac{a \cdot h_a}{\sin A} = 2R \cdot h_a = AA' \cdot AO$. Cum $\angle A'AI \equiv \angle I_aAO$ (pentru că AA' și AO sunt izogonale în $\angle BAC$), rezultă că triunghiurile AOI_a și AIA' sunt asemenea.

Fie J punctul în care paralela prin I la I_aA' intersectează AA' . Atunci $\frac{AJ}{AI} = \frac{AA'}{AI_a} = \frac{AI}{AO}$, deci triunghiurile AJI și AIO sunt asemenea. Rezultă că $m(\angle IOI_a) = m(\angle AOI_a) - m(\angle AOI) = m(\angle AIA') - m(\angle AIJ) = m(\angle JIA') = m(\angle IAA'I_a)$, de unde concluzia.



Problema 4. Pe un cerc se scriu numerele de la 1 la 100 într-o anumită ordine. Spunem despre o pereche de numere de pe cerc că este *bună* dacă cele două nu sunt vecine și dacă pe cel puțin unul din cele două arce de cerc pe care ele le determină se află numai numere mai mici decât fiecare din ele. Cât poate fi numărul total de perechi bune?

Soluția 1:

Vom demonstra că numărul perechilor bune este mereu 97.

Vom face anumite modificări asupra ordinii numerelor de pe cerc. Vom arăta că aceste modificări nu schimbă numărul perechilor bune. Mai întâi vom face rocade între numărul 1 și câte unul din vecinii săi până ce numărul 1 ajunge lângă 100. O astfel de rocadă nu schimbă numărul perechilor bune. Într-adevăr, dacă facem rocada între 1 și unul din vecinii săi, n , toate perechile bune ce nu îl conțin n rămân bune. În plus, nu există perechi bune care să îl conțină pe 1. Perechile bune care îl conțin pe n rămân bune, cu excepția perechii care îl conține pe n și pe celălalt vecin al lui 1. În locul acestei perechi apare perechea bună formată din n și fostul său vecin diferit de 1. Așadar, în urma efectuării acestei rocade, numărul perechilor bune nu s-a schimbat. Efectuăm astfel de rocade până când 1 ajunge lângă 100.

Vom face apoi rocade între 2 și vecinii săi până când 2 ajunge după 1, astfel încât 1 să fie între 100 și 2. Se arată analog că aceste rocade nu modifică numărul perechilor bune. Se continuă cu efectuarea de astfel de rocade până când se ajunge ca ordinea numerelor pe cerc să fie $1, 2, 3, \dots, 100$. Aici se vede ușor că singurele perechi bune sunt $\{k, 100\}$, unde $k \in \{2, 3, \dots, 98\}$, deci că sunt 97 de perechi bune.

Soluția 2: (dată în concurs de *Iustinian Constantinescu*)

Sunt 97 de perechi bune. Vom arăta prin inducție că pentru un cerc cu numerele de la 1 la n sunt $n - 3$ perechi bune.

Pentru $n = 3$ este evident, deoarece toate numerele sunt vecine.

Pentru un cerc cu numerele de la 1 la $n + 1$, scoatem numărul 1 și scădem 1 din toate celelalte numere. Toate perechile bune care nu îl conțineau pe 1, cu excepția celei formate din cei doi vecini ai lui 1, rămân bune deoarece dacă un număr era mai mare decât un altul în cercul cu $n + 1$ numere, el rămâne la fel și în cercul cu n numere. Analog pentru perechile care nu erau bune și nu îl conțineau pe 1. Perechile care îl conțineau pe 1 nu erau bune și dispar, deci pot fi ignorate. Mai rămâne perechea formată din cei doi vecini ai lui 1 care era bună înainte și nu după, deci numărul de perechi bune în cercul cu $n + 1$ numere este cu 1 mai mare decât în cercul cu n numere.

Olimpiada Națională de Matematică
Al cincilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru
Juniori, București, 30 mai 2019

Problema 1. Dacă a, b, c sunt numere reale cu proprietatea că $ab + bc + ca = 0$, demonstrați că $2(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 27a^2b^2c^2$. Când are loc egalitatea?

Problema 2. Determinați numerele naturale nenule n pentru care $4k^2 + n$ este număr prim pentru orice număr natural k mai mic decât n .

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic în care $AB < AC$, D este piciorul înălțimii din A , H este ortocentrul, O este centrul cercului circumscris, M este mijlocul laturii $[BC]$, A' este simetricul lui H față de M , iar S este intersecția tangențelor în B și C la cercul circumscris. Tangenta în A' la cercul circumscris intersectează SC și SB în X , respectiv Y . Dacă M, S, X, Y sunt conciclice, demonstrați că OD și SA' sunt paralele.

Problema 4. Se dau două mulțimi finite, disjuncte, de numere naturale, A și B , având n , respectiv m elemente. Se știe că orice număr natural k care aparține lui $A \cup B$ satisface cel puțin una din condițiile $k + 17 \in A$ și $k - 31 \in B$. Demonstrați că $17n = 31m$.

Timp de lucru: 4 ore

Olimpiada Națională de Matematică
Al cincilea baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru
Juniori, București, 30 mai 2019

Problema 1. Dacă a, b, c sunt numere reale cu proprietatea că $ab + bc + ca = 0$, demonstrați că $2(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 27a^2b^2c^2$. Când are loc egalitatea?

Leonard Giugiuc

Soluție:

Inegalitatea se scrie $2(a^4b^2 + a^4c^2 + b^4a^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + c^4b^2) \geq 21a^2b^2c^2$.

Dacă $abc = 0$, nu avem ce demonstra. În acest caz, trebuie ca două dintre variabile să fie 0, iar inegalitatea din enunț este satisfăcută cu egalitate.

Dacă $abc \neq 0$, împărțim cu $a^2b^2c^2$ și ajungem la

$$2 \left[\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} \right) + \left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} \right) \right] \geq 21,$$

deci la $\frac{a^2b^2 + a^2c^2}{b^2c^2} + \frac{a^2b^2 + b^2c^2}{a^2c^2} + \frac{a^2c^2 + b^2c^2}{a^2b^2} \geq \frac{21}{2}$. Notând $ab = x, bc = y, ca = z$, știm că $x + y + z = 0$ și vrem să demonstrăm că $\frac{x^2 + y^2}{z^2} + \frac{y^2 + z^2}{x^2} + \frac{z^2 + x^2}{y^2} \geq \frac{21}{2}$.

Este evident că două dintre numerele x, y, z au un semn, iar cel de-al treilea semn contrar. Putem presupune $xy > 0$. Înlocuind $z = -x - y$, inegalitatea de demonstrat se scrie $\frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} + \frac{x^2 + 2xy + 2y^2}{x^2} + \frac{y^2 + 2xy + 2x^2}{y^2} \geq \frac{21}{2}$, sau încă

$$\frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} + 2 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + 2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \geq \frac{17}{2}.$$

Dar inegalitățile evidente $\frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} \geq \frac{1}{2}$, $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2$ și $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (toate satisfăcute cu egalitate dacă $x = y$), implică prin adunare inegalitatea de mai sus.

În acest caz, avem egalitate dacă $ab = ac$ și $ab + bc + ca = 0$, adică dacă $b = c = -2a$. În concluzie, egalitate avem pentru tripletele $(\alpha, -2\alpha, -2\alpha)$, $(\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, și pentru cele obținute prin permutarea componentelor acestora.

Problema 2. Determinați numerele naturale nenule n pentru care $4k^2 + n$ este număr prim pentru orice număr natural k mai mic decât n .

Soluție:

Pentru $k = 0$ rezultă că n trebuie să fie prim. Se verifică ușor că $n = 3$ și $n = 7$ au proprietatea din enunț în vreme ce $n = 2$ și $n = 5$ nu o au. Demonstrăm că niciun $n > 10$ nu are proprietatea din enunț.

Dacă $n = 4m + 1$, alegând $k = m < n$ obținem un număr compus, $(2m + 1)^2$. Așadar, există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = 4m - 1$. Dacă m are un divizor impar mai

mare ca 1, d , alegând $2k - 1 = d$ obținem că $4k^2 + 4m - 1 = (2k - 1)(2k + 1) + 4m$ este divizibil cu d și mai mare ca d , deci este număr compus.

Rămâne cazul în care $n = 2^u - 1$ (m este putere a lui 2), $u \geq 4$. Dacă u este compus, n are un divizor propriu de forma $2^a - 1$ și putem lua $k = 2^a - 1$.

Dacă $u = 4j + 1$, atunci pentru $k = 1$ se obține $2^{4j+1} + 3 = M_5$, $2^{4j+1} + 3 > 5$, deci număr compus.

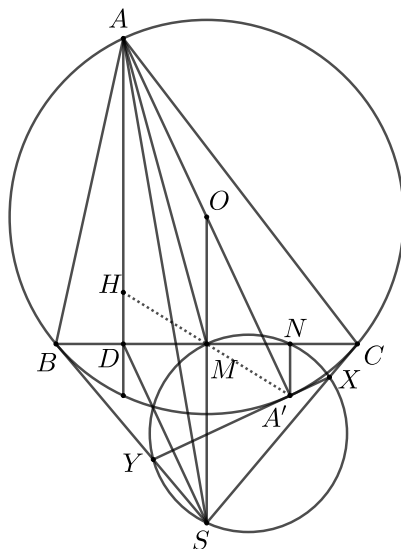
Dacă $u = 4j + 3$, $j \in \mathbb{N}^*$, atunci pentru $k = 2^{2j-1}$ avem $4k^2 + n = 2^{4j} + 2^{4j+3} - 1 = (3 \cdot 4^j)^2 - 1 = (3 \cdot 4^j - 1)(3 \cdot 4^j + 1)$, adică număr compus.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic în care $AB < AC$, D este piciorul înălțimii din A , H este ortocentrul, O este centrul cercului circumscris, M este mijlocul laturii $[BC]$, A' este simetricul lui H față de M , iar S este intersecția tangentelor în B și C la cercul circumscris. Tangenta în A' la cercul circumscris intersectează SC și SB în X , respectiv Y .

Dacă M, S, X, Y sunt conciclice, demonstrați că dreptele OD și SA' sunt paralele.

George Picu

Soluție:



Fie N al doilea punct de intesecție a cercului circumscris lui SXY cu BC . Scriind puterile lui B și C față de cercul circumscris patrulaterului $MXSY$, avem $BM \cdot BN = BY \cdot BS$ și $CN \cdot CM = CX \cdot CS$. Cum $BM = CM$, $BS = CS$, $YB = YA'$ și $XC = XA'$, rezultă că $\frac{BY}{CX} = \frac{BY}{CX} = \frac{BA'}{CA'}$. Din varianta generalizată a teoremei bisectoarei glisante rezultă că $A'N \parallel SM$, deci N este simetricul lui D față de M . În triunghiul SXY , centrul cercului circumscris este pe SN , deci ortocentrul e pe izogonală ei, SD . Rezultă că $SD \perp XY$, adică $SD \parallel AA'$. Atunci $ADSO$ este paralelogram, deci $SD = R$. Atunci și $SDOA'$ e paralelogram, de unde concluzia.

Remarcă: Alte proprietăți ale configurației din problemă:

M este centrul cercului circumscris triunghiului OXY . Într-adevăr, cum SM e bisectoarea lui $\angle XSY$, avem $MX = MT$. Cum $m(\angle XMY) = 180^\circ - m(\angle XSY) = 2m(\angle A) = m(\angle BOC) = 2m(\angle XOY)$ și de aici rezultă concluzia.

$OSA'N$ este trapez isoscel, deci $SN = OA' = R$, deci cercul circumscris triunghiului SXY trece prin M și N și are raza egală cu cea a cercului lui Euler a triunghiului ABC , deci este simetricul acestuia față de punctul M .

Problema 4. Se dau două mulțimi finite, disjuncte, de numere naturale, A și B , având n , respectiv m elemente. Se știe că orice număr natural k care aparține lui $A \cup B$ satisface cel puțin una din condițiile $k + 17 \in A$ și $k - 31 \in B$.

Demonstrați că $17n = 31m$.

Soluție:

Pornim de la un $x_1 \in A \cup B$ arbitrar. Dacă $x_1 + 17 \in A$, alegem $x_2 = x_1 + 17$, iar dacă $x_1 + 17 \notin A$, atunci alegem $x_2 = x_1 - 31 \in B$. Continuăm să alegem $x_{j+1} = x_j + 17$ dacă $x_j + 17 \in A$ și $x_{j+1} = x_j - 31 \in B$ în caz contrar până când obținem (pentru prima dată) un x_{j+1} care a mai fost (pentru care există $k < j$ astfel încât $x_{j+1} = x_k$). Va exista un asemenea indice j deoarece $A \cup B$ este finită. Să demonstrăm că $x_k = x_1$ (adică $k = 1$). Dacă n-ar fi așa, $x_j \neq x_{k-1}$ datorită minimalității indicelui $j + 1$. Dar atunci avem fie $x_{j+1} = x_j + 17 \in A$ și $x_k = x_{k-1} - 31 \in B$, fie, invers, $x_{j+1} = x_j - 31 \in B$ și $x_k = x_{k-1} + 17 \in A$. Cum A și B sunt disjuncte, nu putem avea $x_{j+1} = x_k$. Așadar, $x_{j+1} = x_1$. Dacă printre indicii $2, 3, \dots, j + 1$ există a indici pentru care $x_{m+1} = x_m + 17$ și deci $b = j - a$ indici pentru care $x_{m+1} = x_m - 31$, atunci adunând toate aceste relații obținem $x_1 = x_1 + a \cdot 17 - b \cdot 31$, adică $17 \cdot a = 31 \cdot b$. În plus, cei a indici pentru care $x_{t+1} = x_t + 17$ sunt tocmai aceia pentru care $x_{t+1} \in A$, în vreme ce indicii pentru care $x_{t+1} = x_t - 31$ sunt cei pentru care $x_{t+1} \in B$. Prin urmare, printre numerele $x_1, x_2, \dots, x_j$ sunt a elemente din A și b elemente din B , cu $17a = 31b$.

Dacă prin acest procedeu nu am epuizat toate elementele lui $A \cup B$, alegem un $y_1 \in A \cup B \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$ și definim un nou șir (finit) $y_1, y_2, \dots, y_s$ unde s este primul indice pentru care $y_s \in \{x_1, x_2, \dots, x_j, y_1, y_2, \dots, y_{s-1}\}$. Dacă $y_s \in A$, atunci $y_s = y_{s-1} + 17$. Dacă $y_s = x_r$, cu $r \in \{1, 2, \dots, j\}$, atunci $x_r \in A$ implică $x_r = x_{r-1} + 17$ (indicii sunt luați modulo j), deci $y_{s-1} = x_{r-1}$, contrazicându-se minimalitatea lui s . De asemenea, dacă $y_s = y_r$ cu $r < s$, dacă $r \neq 1$ rezultă $y_{s-1} = y_s - 17 = y_r - 17 = y_{r-1}$, contrazicându-se minimalitatea lui s . Analog se ajunge la contradicție în cazul $y_s \in B$. Așadar, $y_s = y_1$. Așa cum s-a arătat pentru numerele $x_1, x_2, \dots, x_j$, se arată și pentru numerele $y_1, y_2, \dots, y_s$ că raportul dintre numărul de elemente ale lui A din acest șir și numărul de elemente ale lui B din acest șir este $\frac{31}{17}$.

Continuăm acest procedeu până epuizăm mulțimea $A \cup B$. Mulțimea $A \cup B$ va fi descompusă în „cicluri” disjuncte, în fiecare din ele raportul dintre numărul elementelor din ciclu care îi aparțin lui A și numărul celor care îi aparțin lui B fiind $\frac{31}{17}$. Atunci și reunind aceste cicluri, raportul se păstrează.