



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Huși, 3 aprilie 2024

CLASA a VIII-a – soluții și bareme

Problema 1. Determinați numerele întregi n pentru care există o re-aranjare $a_1, a_2, \dots, a_{1013}$ a numerelor $1012, 1013, \dots, 2024$, astfel încât să aibă loc egalitatea $a_1 \cdot n^{1012} + a_2 \cdot n^{1011} + \dots + a_{1012} \cdot n + a_{1013} = 0$.

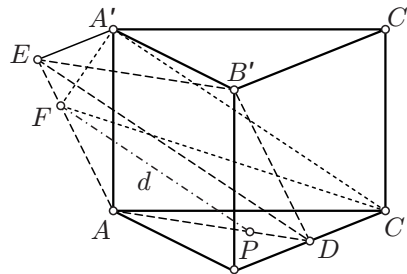
Problema 2. Spunem că o funcție de gradul întâi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este *utilă*, dacă are proprietățile:

(i) $|f(x)| \leq 2$, pentru orice număr real x cu $|x| \leq 2$.

(ii) $|f(x)| \geq 1$, pentru orice număr real x cu $|x| \leq 1$.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Demonstrați că există o funcție utilă cu $f(x_0) = 0$, dacă și numai dacă $|x_0| \geq 4$.

Problema 3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, cu muchiile laterale AA' , BB' , CC' . Considerăm mijlocul D al muchiei BC și construim paralelogramul $ADB'E$. Fie F proiecția ortogonală a punctului A' pe dreapta AE , d dreapta de intersecție a planelor (ADE) și $(A'CF)$ și P intersecția dreptei d cu planul (ABC) . Demonstrați că P este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $AB = AA'\sqrt{2}$.



Problema 4. Fie a și b două numere naturale distincte, mai mari decât 1, astfel încât $D = b^2 + a - 1$ divide $M = a^2 + b - 1$.

- Arătați că există numere care îndeplinesc condițiile de mai sus.
- Demonstrați că D are cel puțin doi divizori primi.