

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA NAȚIONALĂ, 2015
Clasa a IX-a

1. Arătați că nu putem alege 45 de elemente distincte ale mulțimii $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{2015}\}$, astfel încât numerele selectate să fie în progresie aritmetică.
2. O funcție f de gradul al doilea are proprietatea: pentru orice interval I de lungime 1, intervalul $f(I)$ are lungimea cel puțin 1.

Arătați că, pentru orice interval J de lungime 2, intervalul $f(J)$ are lungimea cel puțin 4.

3. Punctul P este în interiorul triunghiului ABC , iar dreptele AP , BP , CP taie laturile BC , AC , AB în A_1 , B_1 , respectiv C_1 . Se știe că

$$\sigma[PBA_1] + \sigma[PCB_1] + \sigma[PAC_1] = \frac{1}{2}\sigma[ABC],$$

unde cu $\sigma[XYZ]$ s-a notat aria triunghiului XYZ .

Arătați că punctul P se află pe o mediană a triunghiului ABC .

4. Fie $a, b, c, d \geq 0$ numere reale astfel încât $a + b + c + d = 1$. Arătați că

$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{6}} + \frac{(c-d)^2}{6} + \frac{(d-b)^2}{6} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 2.$$