

**Problema 3 - PATRATE**

Descrierea soluției

O primă idee, greu de implementat este de a genera toate submulțimile de $2, 3, \dots, n$ elemente ale mulțimii numerelor naturale și apoi de ale căuta pe acelea cu proprietatea că dau aceeași sumă a pătratelor. Această idee este inutilizabilă din punct de vedere practic deoarece numărul de submulțimi este foarte mare.

Soluția se bazează pe o idee constructivă, mai precis pe construirea din aproape în aproape a soluției.

Să demonstrăm pentru început, din punct de vedere matematic că există un număr natural m care se poate scrie, simultan ca suma de $2, 3, \dots, n$ pătrate perfecte nenule, de numere întregi.

Vom demonstra prin inducție această proprietate.

$P(1)$ Pentru $n=2$ se găsește $m_2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$n=3$ se găsește $m_3 = 1^2 + 4^2 = 2^2 + 2^2 + 3^2 = 17$

$P(k)$ Presupunem relația adevărată pentru $n=k$, cu alte cuvinte există un număr m care se scrie ca suma de $2, 3, \dots, k$ pătrate de numere întregi nenule. Așadar $m_k = a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \dots = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_k^2$

$P(k+1)$ Vom demonstra acum ca și relația $P(k+1)$ este adevărată.

Mai întâi vom utiliza un alt rezultat, ușor de demonstrat și anume că orice număr natural p 7 poate fi scris sub forma $p = a^2 + b^2 - c^2$. Vom aplica acest rezultat pentru m_k și vom obține 3 numere întregi a, b, c , astfel încât $m_k = a^2 + b^2 - c^2$.

Odată m_k scris sub acesta formă avem :

$$m_{k+1} = m_k + c^2 = a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2 + c^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c^2 = \dots = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_k^2 + c^2.$$

Exemplu $m_3 = 17 = 3^2 + 3^2 - 1^2,$

de unde $m_4 = 17 + 1^2 = 3^2 + 3^2 = 1^2 + 4^2 + 1^2 = 2^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 = 18$

Așadar $P(k+1)$ este adevărată deci $P(n)$ este adevărată pentru orice n natural.

Soluția urmărește mecanismul descris anterior, cu observația că pentru a genera un număr m cât mai mic, fără a avea pretenția că este cel mai mic, facem descompunerea $m_k = a^2 + b^2 - c^2$ în așa fel încât c să fie minim.