

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Județeană și a Municipiului București, 18 martie 2017
CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue, astfel încât $f(x)g(x) \geq 4x^2$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Arătați că cel puțin unul dintre numerele

$$\left| \int_0^1 f(x) \, dx \right|, \quad \left| \int_0^1 g(x) \, dx \right|$$

este mai mare sau egal cu 1.

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și fie m și n două numere naturale nenule, prime între ele. Arătați că, dacă funcțiile $f: G \rightarrow G$, $f(x) = x^{m+1}$, și $g: G \rightarrow G$, $g(x) = x^{n+1}$, sunt endomorfisme surjective, atunci grupul G este comutativ.

Problema 3. Determinați cel mai mic număr real a , care îndeplinește condiția

$$a \geq \sum_{k=1}^n a_k \cos(a_1 + \cdots + a_k),$$

oricare ar fi numărul natural nenul n și oricare ar fi numerele reale strict pozitive $a_1, \dots, a_n$, a căror sumă este cel mult π .

Problema 4. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel care îndeplinește simultan următoarele două condiții:

(1) A nu este corp;

(2) $x^2 = x$, oricare ar fi elementul neinvertibil x din A .

Arătați că:

(a) $a + x$ este neinvertibil, oricare ar fi a și x din A , a invertibil și x nenul și neinvertibil;

(b) $x^2 = x$, oricare ar fi x din A .