



Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2011. március 12.

XII. OSZTÁLY

1. feladat. Igazold, hogy az $\frac{1}{\pi} \int_{\sin \frac{\pi}{13}}^{\cos \frac{\pi}{13}} \sqrt{1-x^2} dx$ szám racionális!

2. feladat. Legyen G a következő mátrixok halmaza:

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ \hat{0} & \hat{1} \end{array} \right), \quad a, b \in \mathbb{Z}_7, \quad a \neq \hat{0}.$$

- (a) Igazold, hogy G a mátrixok szorzásával csoportot alkot!
- (b) Igazold, hogy nincs nullától különböző csoportmorfizmus, amely a G csoportot a $\mathbb{Z}_7$ additív csoportba viszi!

3. feladat. Adott az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és növekvő függvény és az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat úgy, hogy

$$a_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{k}{2^n}\right),$$

minden $n \geq 1$ esetén.

a) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat csökkenő!

b) Ha létezik $p \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $a_p = \int_0^1 f(x) dx$, igazold, hogy f állandó!

4. feladat. Legyen a az A gyűrű egy eleme. Igazold, hogy

- (a) Ha A kommutatív és a nilpotens, akkor $a + x$ invertálható, bármely $x \in A$ invertálható elem esetén!
- (b) Ha A véges és $a + x$ invertálható bármely $x \in A$ invertálható elem esetén, akkor a nilpotens.

(Egy gyűrű valamely a eleme *nilpotens*, ha létezik olyan $n \geq 1$ egész szám, amelyre $a^n = 0$.)