



Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2011. március 12.

XI. OSZTÁLY

1. feladat. a) Igazold, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén az $\{x + y\} - \{y\}$ kifejezés csak a $\{x\}$ vagy a $\{x\} - 1$ értékeket veheti fel!

b) Adott az α irracionális szám. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ szám esetén legyen $a_n = \{n\alpha\}$ és

$$x_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \cdots (a_{n+1} - a_n).$$

Igazold, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens, és számítsd ki a határértékét!

Megjegyzés. $\{x\}$ az x valós szám törtrészét jelöli.

2. feladat. Az $n \leq m$ természetes számok esetén adottak az $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ és $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ mátrixok úgy, hogy $\text{rang}(AB) = n$ és $(AB)^2 = AB$.

a) Igazold, hogy $(BA)^3 = (BA)^2$,

b) Határozd meg a BA mátrixot!

3. feladat. Az $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \setminus \{O_2\}$ mátrixok esetén $AB + BA = O_2$ és $\det(A + B) = 0$. Igazold, hogy $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$.

4. feladat. Határozd meg azokat az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre

$$|x - y|^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y|,$$

minden $x, y \in [0, 1]$ esetén!