

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022****CLASA a X-a**

Problema 1. Determinați $x \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ pentru care:

$$\log_x(1-x) + \log_2 \frac{1-x}{x} = \frac{1}{(\log_2 x)^2}.$$

Problema 2. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe de modul 1, cu proprietatea că

$$|z_i - z_j| \geq \sqrt{2}, \text{ pentru orice } i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j.$$

Demonstrați că $|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leq 3$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Un număr natural $n \geq 4$ se numește *interesant* dacă există cel puțin un număr complex z de modul 1 pentru care $1 + z + z^2 + z^{n-1} + z^n = 0$.
Determinați câte numere interesante sunt cel mult egale cu 2022.

Problema 4. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația

$$f(f(y-x) - xf(y)) + f(x) = y \cdot (1 - f(x)), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

*Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*