

Olimpiada Națională de Matematică

Etapă finală, Arad, 28 mai 2011

CLASA a VI-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Determinați cifrele a, b, c, m, n, p pentru care:

$$\overline{0,(abc)} \cdot \overline{1,(mnp)} = 1.$$

Soluție. Egalitatea din enunț este echivalentă cu

$$\overline{abc} \cdot (999 + \overline{mnp}) = 37^2 \cdot 3^6. \dots\dots\dots 1p$$

Deoarece $37^2 = 1369 > \overline{abc}$, sunt posibile două cazuri:

a) Dacă $37 | \overline{abc}$, atunci $\overline{abc} = 37 \cdot 3^k$, $k \leq 2$ (pentru $k \geq 3$ s-ar obține $\overline{abc} \geq 999$, imposibil).

Atunci $\overline{abc} \leq 333$, de unde $999 + \overline{mnp} \geq 2997$, imposibil. $\dots\dots\dots 3p$

b) Dacă $37 \nmid \overline{abc}$, atunci $\overline{abc} = 3^k$, $k \leq 6$.

Cum $999 + \overline{mnp} \leq 999 + 998 = 1997$, rezultă $\overline{abc} \geq \frac{999^2}{1997}$, deci $\overline{abc} \geq 500$.

Ca urmare $\overline{abc} = 3^6 = 729$, pentru care se obține $\overline{mnp} = 370$. $\dots\dots\dots 3p$

Problema 2. Considerăm numerele naturale nenule a, b și c astfel încât

$$(a+1)^b = (a+25)^c.$$

Demonstrați că $b+c$ este multiplu de 4.

Soluție

Este evident că $b > c$, deci putem scrie $(a+25)^c = (a+1)^c \cdot (a+1)^{b-c}$, de unde $(a+1)^c | (a+25)^c$, adică $a+1 | a+25$. $\dots\dots\dots 2p$

Obținem $a+1 | 24$, deci $a \in \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 23\}$. $\dots\dots\dots 1p$

Convin doar:

• $a = 2$, caz în care obținem $3^b = 27^c$, de unde $b = 3c$, $c \in \mathbb{N}^*$;

• $a = 7$, caz în care obținem $8^b = 32^c$, de unde $b = 5k$, $c = 3k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

$\dots\dots\dots 3p$

În ambele cazuri $b+c$ este multiplu de 4. $\dots\dots\dots 1p$

Problema 3. Triunghiul isoscel ABC de bază BC are $m(\sphericalangle B) > 30^\circ$. În interiorul triunghiului ABC considerăm punctul M astfel încât $m(\sphericalangle MBC) = 30^\circ$ și $m(\sphericalangle MAB) = \frac{3}{4}m(\sphericalangle BAC)$. Determinați măsura unghiului AMC .

Soluție. Construim bisectoarea (AD a unghiului BAC , $D \in (BC)$ și notăm $\{P\} = AD \cap BM$.

Cum triunghiul ABC este isoscel, ($AB = AC$), rezultă că AD este mediatoarea segmentului $[BC]$. Prin urmare, triunghiul BPC este isoscel și $m(\sphericalangle BPD) = m(\sphericalangle DPC) = 60^\circ$. De aici obținem $m(\sphericalangle APM) = m(\sphericalangle CPM) = 60^\circ$2p

Din $m(\sphericalangle BAM) = \frac{3}{4}m(\sphericalangle BAC)$, obținem $m(\sphericalangle PAM) = m(\sphericalangle MAC) = \frac{1}{4}m(\sphericalangle BAC)$2p

Așadar, AM și PM sunt bisectoarele unghiurilor PAC și APC din triunghiul APC , de unde rezultă că CM este bisectoarea unghiului PCA1p

Din triunghiul MAC obținem
 $m(\sphericalangle AMC) = 180^\circ - \frac{1}{2}(m(\sphericalangle PAC) + m(\sphericalangle PCA)) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 150^\circ$ 2p

Problema 4. a) Arătați că este posibil să așezăm pe un rând 20 de numere întregi nenule (nu neapărat diferite) cu suma strict pozitivă, astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie strict negativă.

b) Demonstrați că nu se pot așeza pe un cerc 20 de numere întregi cu suma strict pozitivă astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie strict negativă.

Soluție. a) Un exemplu este:

17, -9, -9, 17, -9, -9, ..., 17, -9, -9, 17, -9.4p

b) Presupunem că numerele $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ sunt așezate pe cerc în această ordine, în sensul mișcării acelor de ceasornic, a_1 fiind cel mai mare număr.

Dacă $a_1 < 0$, atunci toate numerele sunt negative, deci suma lor este negativă.1p

Dacă $a_1 > 0$, atunci $a_2 + a_3 < 0$, deci

$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \dots + (a_{19} + a_{20} + a_1) < 0$.
2p