



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a VII-a

Problema 1. Fie $ABCD$ un pătrat, M mijlocul laturii AD , T intersecția dreptelor BM și CD , iar $CP \perp BM$, $P \in MB$. Perpendiculara dusă prin punctul A pe dreapta AP intersectează dreapta BM în punctul Q . Arătați că:

- a) $\angle APQ = \angle PCQ = 45^\circ$.
- b) $PQ = QT = PC$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră două mulțimi A și B de numere reale care au proprietățile:

- a) $0 \in A$;
 - b) Dacă $1 + x \in A$, atunci $\sqrt{1 + x + x^2} \in B$;
 - c) Dacă $\sqrt{x^2 - x + 1} \in B$, atunci $2 + x \in A$.
- Arătați că $\sqrt{3}, \sqrt{13}, \sqrt{31}$ sunt elemente ale mulțimii B și $2024 \in A$.

Problema 3. Un număr natural $n \geq 2$ se numește *special* dacă există n numere naturale impare a căror sumă este egală cu produsul lor.

- a) Arătați că 5 este un număr special.
- b) Determinați câte numere speciale conține mulțimea $\{2, 3, \dots, 2024\}$.

Problema 4. Se consideră un paralelogram $ABCD$ și punctele M pe latura DC , E și N pe diagonala AC , astfel încât $BE \perp AC$ și $\frac{CM}{CD} = \frac{EN}{EA}$.

Arătați că, dacă MN și NB sunt perpendiculare, atunci $ABCD$ este dreptunghi.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.