



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Sovata, 20 aprilie 2016
CLASA a V-a

Enunțuri

Problema 1. Două numere naturale x și y au proprietatea că $\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}$. Determinați cea mai mică valoare a sumei $x + y$.

Problema 2. Determinați numerele naturale a, b, c care au proprietatea că $a + b + c = abc$.

Problema 3. O mulțime $X \subset \mathbb{N}^*$ are proprietatea ($\mathcal{P}$) dacă oricare submulțime nevidă a sa are suma elementelor număr compus. Arătați că mulțimea $Y = \{113! + 2, 113! + 3, \dots, 113! + 15\}$ are proprietatea ($\mathcal{P}$). (Dacă n este număr natural nenul, notația $n!$ reprezintă produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)

Problema 4. Pe un cerc se scriu la întâmplare elementele mulțimii $\{1, 2, \dots, 21\}$ în ordinea $a_1, a_2, \dots, a_{21}$ (vezi figura alăturată). Se consideră sumele

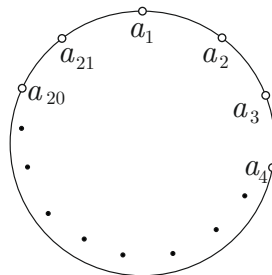
$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$

$$S_2 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,$$

$\dots$

$$S_{17} = a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21},$$

$$S_{18} = a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_1.$$



Arătați că cel puțin două dintre cele 18 sume dau resturi diferite la împărțirea cu 5.

Timp de lucru 2 ore și 30 de minute.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.