

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

CLASA a XII-a - Subiecte

1. Fie A un inel finit și $a, b \in A$ cu proprietatea că $(ab - 1)b = 0$. Arătați că $b(ab - 1) = 0$.

2. Fie $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac condiția

$$e^{f(x)} + f(x) \geq x + 1,$$

pentru orice x număr real. Determinați valoarea minimă pe care o poate lua integrala

$$I(f) = \int_0^e f(x) dx,$$

atunci când f parcurge $\mathcal{F}$.

3. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă, iar $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

a) Dacă $A = \{m \cdot a_n \mid m, n \in \mathbb{N}^*\}$, arătați că orice interval deschis de numere strict pozitive conține elemente din A .

b) Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $x, y \in [a, b]$ cu $|x - y| = a_n$ are loc inegalitatea

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq |x - y|, \text{ arătați că:}$$

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

4. Pentru $k \in \mathbb{Z}$ definim polinomul $F_k = X^4 + 2(1 - k)X^2 + (1 + k)^2$. Să se determine toate valorile $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât F_k să fie ireductibil peste $\mathbb{Z}$ și reductibil peste $\mathbb{Z}_p$ pentru orice p prim.