

Problema a III - a (10 puncte)

Comprimare adiabetică...provocată

Un piston, cu aria suprafeței S , închide un gaz ideal monoatomic ($\gamma = 5/3$) într-un cilindru vertical drept (Fig. 1). Sistemul se află în câmpul gravitațional terestru, iar ansamblul cilindru – piston este izolat adiabetic de exterior. La echilibru, parametrii gazului sunt p , V și T . Un corp cu masa m cade liber de la o anumită înălțime și se lipește de piston, astfel încât energia cinetică a pistonului (împreună cu corpul), imediat după lipire, este E_c . Se neglijează frecările dintre piston și cilindru, capacitatea calorică a ansamblului piston – cilindru, precum și timpul de interacțiune (lipirea) dintre corp și piston.

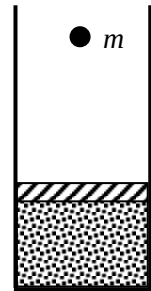


Fig. 1

În aceste condiții, să se determine:

- diferența de nivel dintre poziția inițială a pistonului și noua sa poziție de echilibru mecanic (Δy_1);
 - temperatura gazului când pistonul se află în noua poziție de echilibru mecanic (T_1);
 - energia cinetică a pistonului când acesta trece prin noua sa poziție de echilibru mecanic (E_{c1}).
- Admițând că $mg \ll pS$, să se aproximeze rezultatul găsit pentru energia cinetică, utilizând formula de aproximație $(1+x)^n \approx 1+nx + n(n-1)x^2/2$, valabilă pentru $x \ll 1$, n putând fi un număr întreg sau neîntreg.

Problema a III - a (10 puncte) - Soluție

- Dacă presiunea atmosferică este p_0 , iar masa pistonului M , atunci echilibrul mecanic al pistonului, înainte de căderea pietrei, duce la

$$p = p_0 + \frac{Mg}{S}. \quad (1)$$

În noua poziție de echilibru mecanic, presiunea gazului este

$$p_1 = p_0 + \frac{(m+M)g}{S} = p + \frac{mg}{S} = p \left(1 + \frac{mg}{pS}\right), \quad (2)$$

iar volumul ocupat de gaz

$$V_1 = V - S\Delta y_1 = V \left(1 - \frac{S\Delta y_1}{V}\right). \quad (3)$$

Deoarece timpul de lipire a corpului de piston este neglijabil, pistonul nu are timp să se miște, așa încât starea inițială a sistemului este caracterizată de mărimile p , V , T , E_c . Din legea transformării adiabatice, scrisă între cele două stări,

$$pV^\gamma = p_1V_1^\gamma, \quad (4)$$

rezultă

$$1 = \left(1 + \frac{mg}{pS}\right) \left(1 - \frac{S\Delta y_1}{V}\right)^\gamma,$$

sau

$$\Delta y_1 = \frac{V}{S} \left[1 - \left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{-\frac{2}{\gamma}} \right]. \quad (5)$$

- Scriind legea transformării generale a gazelor pentru cele două stări

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1V_1}{T_1},$$

se găsește

$$T_1 = T \frac{p_0 V_1}{pV} = T \left(1 + \frac{mg}{pS}\right) \left(1 - \frac{S \Delta y_1}{V}\right). \quad (6)$$

Introducând (5) în (6), rezultă

$$T_1 = T \frac{p_0 V_1}{pV} = T \left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{1-\frac{5}{3}} = \boxed{T \left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{3}}}. \quad (7)$$

c. Pentru sistemul gaz – piston, teorema variației energiei se scrie

$$\Delta E = L, \quad (8)$$

unde lucrul mecanic este efectuat de singura forță externă care acționează asupra acestui sistem, $p_0 S$

$$L = p_0 S \cdot \Delta y_1, \quad (9)$$

iar

$$\Delta E = E_1 - E = (E_{c1} + E_{p1} + U_1) - (E_c + E_p + U) = E_{c1} - E_c + \Delta E_p + \Delta U. \quad (10)$$

Cum

$$\Delta E_p = -(m + M)g \Delta y_1, \quad (11)$$

iar

$$\Delta U = \nu C_V (T_1 - T) = \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T) = \frac{3}{2} \nu R T \left[\left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] = \frac{3}{2} pV \left[\left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right], \quad (12)$$

atunci, din (8) – (12) rezultă

$$E_{c1} = E_c + (p_0 S + mg + Mg) \Delta y_1 - \frac{3}{2} pV \left[\left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]. \quad (13)$$

Ținând cont de (1) și (5), (13) se scrie

$$\begin{aligned} E_{c1} &= E_c + (pS + mg) \frac{V}{S} \left[1 - \left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{-\frac{2}{3}} \right] - \frac{3}{2} pV \left[\left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \\ &= E_c + pV \left(1 + \frac{mg}{pS}\right) \left[1 - \left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{-\frac{2}{3}} \right] - \frac{3}{2} pV \left[\left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \\ &= E_c + pV \left[1 + \frac{mg}{pS} - \left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{3}} \right] - \frac{3}{2} pV \left[\left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \\ &= E_c + pV \left[\frac{5}{2} + \frac{mg}{pS} - \frac{5}{2} \left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{3}} \right] \\ &= \boxed{E_c + \frac{5}{2} pV \left[1 + \frac{2mg}{5pS} - \left(1 + \frac{mg}{pS}\right)^{\frac{2}{3}} \right]}. \end{aligned} \quad (14)$$

Dacă $mg \ll pS$, atunci (14) devine

$$\boxed{E_{c1} \cong E_c + \frac{3}{10} \frac{mg}{pS} \cdot mg \frac{V}{S}} \quad (15)$$

Soluție propusă de:

Conf. univ. dr. Sebastian POPESCU - Facultatea de Fizică, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” Iași