



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 16 martie 2019

CLASA a XII-a — Subiecte

Problema 1. Fie n un număr natural nenul și fie G un grup finit de ordin n . O funcție $f: G \rightarrow G$ are proprietatea (P), dacă $f(xyz) = f(x)f(y)f(z)$, oricare ar fi x, y, z din G .

(a) Dacă n este impar, arătați că orice funcție care are proprietatea (P) este un endomorfism al lui G ;

(b) Dacă n este par, rămâne adevărată concluzia de la punctul (a)?

Problema 2. Fie n un număr natural nenul și fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă. Arătați că există un punct c în intervalul închis $[0, 1 - 1/n]$, astfel încât

$$\int_c^{c+\frac{1}{n}} f(x) \, dx = 0 \quad \text{sau} \quad \int_0^c f(x) \, dx = \int_{c+\frac{1}{n}}^1 f(x) \, dx.$$

Problema 3. Fie G un grup finit și fie $x_1, \dots, x_n$ o enumerare a elementelor sale.

Considerăm matricea $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, unde $a_{ij} = 0$, dacă $x_i x_j^{-1} = x_j x_i^{-1}$, și $a_{ij} = 1$, în caz contrar. Determinați paritatea numărului întreg $\det(a_{ij})$.

Problema 4. Fie a un număr real, $a > 1$. Determinați numerele reale $b \geq 1$ astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x (1 + t^a)^{-b} \, dt = 1.$$