

### Descriere soluție problema 1 – sir

autor prof. Carmen Mincă  
Liceul Teoretic Ion Neculce - Bucuresti

Șirul de numere din enunțul problemei se obține pornindu-se de la șirul de numere: 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1234567, 12345678, 123456789.

Fiecare număr din șirul de mai sus se modifică succesiv prin permutări circulare ale cifrelor numărului la stânga cu o poziție. De exemplu, din numărul 12345 se vor obține în această ordine, numerele: 23451, 34512, 45123, 51234.

După fiecare număr din șirul de mai sus, se vor insera în șir toate numerele obținute prin permutări circulare la stânga cu o poziție.

#### Rezolvare cerința a):

Notăm cu  $u.c.(n)$  = ultima cifră a numărului natural  $n$ .

Se observă că pentru:

- $k=1 \Rightarrow s=1 \Rightarrow u.c.(1)=1$
- $k=2 \Rightarrow s=1+12+21 \Rightarrow u.c.(s)=u.c.([1+(1+2)])=u.c.(1+3)=4$
- $k=3 \Rightarrow s=1+12+21+123+231+312 \Rightarrow$   
 $u.c.([1+(1+2)+(1+2+3)])=u.c.([1+3+6])=0$
- $k=4 \Rightarrow s=1+12+21+123+231+312+1234+\dots+4123 \Rightarrow$   
 $u.c.(s)=0+u.c.(4+1+2+3)=0$
- $k=5 \Rightarrow u.c.(s)=0+u.c.(5+1+2+3+4)=5$
- ...

Ultima cifră a sumei tuturor numerelor de câte  $k$  cifre se obține adunând ultimele cifre ale numerelor 1234... $(k-1)k$ , 234... $(k-1)k1$ , 34... $(k-1)k12$ , 4... $(k-1)k123$ , ...,  $k1234... (k-1)$ . Astfel, ultima cifră a acestei sume este  $u.c.(1+2+3+\dots+k)=[k*(k+1)/2]$

Ultima cifră a sumei tuturor numerelor formate din cel mult  $k$  cifre este:

$$s=u.c.([1+u.c.(1+2)+u.c.(1+2+3)+\dots+u.c.(1+2+\dots+k)])=$$
$$=u.c.([1+u.c.([2*3/2])+u.c.([3*4/2])+\dots+u.c.([k*(k+1)/2])])$$

Secvența de program care calculează în variabila  $s$  ultima cifră este următoarea:

```
for (s=1, i=2; i<=k; i++) s=(s+i*(i+1)/2)%10;
```

#### Rezolvare cerința b):

##### Varianta I. Implementare fără utilizarea tipurilor structurate

Dacă numărul  $x$  citit este 612345 atunci succesorul acestuia în șirul din enunț este 1234567, primul număr format din 7 cifre, deoarece 612345 este ultimul număr obținut prin permutări circulare spre stânga cu o poziție a numărului 12345. Dacă s-ar mai efectua o permutare s-ar ajunge la numărul inițial 12345.

Dacă numărul  $x$  citit este 456123, cum numărul de cifre este egal cu 6 și prima cifră este 4 $\neq$ 6, rezultă că se mai poate face o permutare la stânga cu o poziție. În urma efectuării acestei operații se obține succesorul numărului  $x$  și anume: 561234.

Astfel deducem că:

- dacă prima cifră a lui  $x$  este egală cu numărul  $k$  de cifre din care este format  $x$ , atunci succesorul lui  $x$  este cel mai mic număr format din  $k+1$  cifre distincte:  $\overline{123\dots k(k+1)}$
- dacă prima cifră a lui  $x$  este mai mică decât numărul  $k$  de cifre din care este format  $x$ , atunci succesorul lui  $x$  este numărul obținut prin efectuarea unei permutări la stânga cu o poziție a numărului  $x$

Secvența de program care determină și memorează în variabila  $z$  succesorul numărului  $x$  este următoarea:

```
y=x; k=1;
while (y>9) //k=numarul de cifre ale lui x
{ k++; y/=10; p=p*10; }
if (y==k) //y va retine prima cifra a lui x
{ z=0; //cel mai mare numar cu k cifre este k1234...(k-1)
  for (i=1; i<=k+1; i++)
    z=z*10+i;
}
else z=(x%p)*10+y; //succesorul este (y+1)(y+2)..k123...y
```

### Varianta 2. Implementare cu utilizarea tipurilor structurate

Se poate utiliza un vector  $v$  cu maxim 10 componente, care va memora cifrele numărului  $x$ , cifra unităților fiind memorată în  $v[1]$ ,..., iar cifra cea mai semnificativă în  $v[k]$ , variabila  $k$  memorând numărul de cifre ale lui  $x$ .

Dacă  $v[k]=k$ , atunci succesorul lui  $x$  este cel mai mic număr format din  $k+1$  cifre distincte:  $\overline{123\dots k(k+1)}$ . Altfel, succesorul lui  $x$  are  $k$  cifre și este  $\overline{v[k-1]v[k-2]\dots v[2]v[1]v[k]}$

**Rezolvare cerinta c):**

#### Cazul I. $a < b$

Numerele care au cifra cea mai semnificativă egală cu cifra  $a$  și nu conțin cifra  $b$  sunt formate doar cu cifrele  $1, 2, 3, \dots, a, \dots, (b-1)$ . Cel mai mic număr este cel care conține  $a$  cifre și anume:  $\overline{a123\dots(a-1)}$ , iar toate aceste numere, în ordinea apariției lor în șir, sunt:

$\overline{a123\dots(a-1)}, \overline{a(a+1)123\dots(a-1)}, \overline{a(a+1)(a+2)123\dots(a-1)}, \dots, \overline{a(a+1)(a+2)\dots(b-1)123\dots(a-1)}$

Astfel, numărul lor este egal cu  $b-a$

#### Cazul II. $a \geq b$

Nu există niciun astfel de număr în șirul dat. Dacă cifra  $a$  apare în număr, atunci obligatoriu vor apărea și cifrele  $1, 2, 3, \dots, (a-1)$

Cum  $b < a$  atunci în fiecare număr în care apare cifra  $a$  va apărea și cifra  $b \Rightarrow 0$  numere