

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Județeană și a Municipiului București, 18 martie 2017

CLASA a X-a

- Problema 1.** a) Să se determine $x \in \mathbb{N}$ și $y \in \mathbb{Q}$ dacă $\sqrt{x + \sqrt{x}} = y$.
b) Să se arate că există o infinitate de perechi $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ astfel încât $\sqrt{x + \sqrt{x}} = y$.

- Problema 2.** Determinați perechile (x, y) de numere întregi pentru care

$$2^x + \log_3 x = y^2 \text{ și } 2^y + \log_3 y = x^2.$$

- Problema 3.** Fie $a \in (0, +\infty)$. Demonstrați inegalitatea

$$a^{\sin x} \cdot (a + 1)^{\cos x} \geq a, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

- Problema 4.** Fie $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

- a) Demonstrați că $(|z + 1| - \sqrt{2})(|z - 1| - \sqrt{2}) \leq 0, \forall z \in A$.
b) Demonstrați că pentru orice $z_1, z_2, \dots, z_{12} \in A$ există o alegere a semnelor "±" pentru care

$$\sum_{k=1}^{12} |z_k \pm 1| < 17.$$