



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Târgu Mureș, 3 aprilie 2024

CLASA a XI-a – subiecte

Problema 1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe I , cu proprietatea $f(x) \cdot f''(x) = 0$, pentru orice $x \in I$. Arătați că $f''(x) = 0$, pentru orice $x \in I$.

Problema 2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă.

- Arătați că matricea AA^T are valorile proprii reale, strict pozitive.
- Presupunem că există numerele naturale nenule și distincte p și q astfel ca $(AA^T)^p = (A^T A)^q$. Arătați că $A^T = A^{-1}$.
(Notăție: A^T este transpusa matricei A .)

Problema 3. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considerăm funcția matriceală $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, definită prin $f(Z) = AZ + B\bar{Z}$, $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unde $\bar{Z}$ este matricea având ca elemente conjugatele elementelor lui Z . Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- funcția f este injectivă;
- funcția f este surjectivă;
- matricele $A + B$ și $A - B$ sunt inversabile.

Problema 4. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $g(x) = 2f(x) + f(x^2)$, pentru $x \in \mathbb{R}$.

- Arătați că, dacă f este mărginită într-o vecinătate a originii, iar g este continuă în origine, atunci f este continuă în origine.
- Dați un exemplu de funcție f , discontinuă în origine, pentru care funcția g este continuă în origine.