

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022****CLASA a XI-a**

Problema 1. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\inf_{x>a} f(x) = g(a) \text{ și } \sup_{x<a} g(x) = f(a),$$

oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$. Știind că f are proprietatea lui Darboux, arătați că funcțiile f și g sunt continue și egale.

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel ca $A^2 + B^2 = O_3$. Arătați că $\det(aA + bB) = 0$, pentru oricare numere reale a și b .

Problema 3. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit în mod recurent prin $x_1 = 1$ și

$$x_{n+1} = \frac{x_1}{n+1} + \frac{x_2}{n+2} + \dots + \frac{x_n}{2n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm șirul $(y_n)_{n \geq 1}$, cu $y_n = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

- a) $x_{n+1}^2 < \frac{y_n}{2}$ și $y_{n+1} < \frac{2n+1}{2n+2} y_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Problema 4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unde $n \geq 2$. Notăm cu m numărul de elemente ale mulțimii $\{\text{rang}(A^k) - \text{rang}(A^{k+1}) \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Arătați că $n \geq \frac{m(m+1)}{2} - 1$.

*Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*