

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Negrești Oaș, 4 aprilie 2018
Subiecte – CLASA a VI-a

Problema 1. Arătați că există o infinitate de numere naturale a și b care verifică egalitatea

$$a \cdot (a, b) = b + [a, b],$$

unde cu (a, b) am notat cel mai mare divizor comun al numerelor a și b și cu $[a, b]$ am notat cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

Problema 2. Se consideră segmentele congruente AB , BC și AD , unde $D \in (BC)$. Arătați că mediatoarea segmentului DC , bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$ și dreapta AC sunt concurente.

Problema 3. Fie numerele naturale $a \neq 0$, $b = 2a + 1000$, $c = a + 1$ și $d = 2a + 1002$.

a) Arătați că $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

b) Pentru $a = 9$, determinați cel mai mic număr natural n pentru care $\frac{a+n}{b+n} > \frac{c+n}{d+n}$.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Vom spune că o mulțime A de numere naturale este *completă de mărime n* dacă elementele ei sunt nenule, iar mulțimea tuturor resturilor obținute la împărțirea unui element din A la un element din A este $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. De exemplu, mulțimea $\{3, 4, 5\}$ este o mulțime completă de mărime 4.

Determinați numărul minim de elemente ale unei mulțimi complete de mărime 100.