



Matematika tantárgyverseny
Megyei szakasz, 2011. március 12.

IX. OSZTÁLY

1. feladat. Az $ABCD$ paralelogramma AB , BC , CD és DA oldalain adottak az $\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{P}$, illetve $\overrightarrow{Q}$ pontok úgy, hogy $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AC}$. Igazold, hogy $\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{DB}$.

2. feladat. Minden nullától különböző n természetes szám esetén jelöljük A_n -nel a $\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n$ alakban felírható számok halmazát; például: $A_2 = \{-3, -1, 1, 3\}$ és $A_3 = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$. Határozd meg az A_n halmaz elemeinek számát!

3. feladat. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy $f(f(x)) = [x]$, bármely x valós szám esetén. Igazold, hogy léteznek olyan a és b különböző valós számok, amelyekre $|f(a) - f(b)| \geq |a - b|$.

Megjegyzés. $[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli.

4. feladat. Adott az $a \in \mathbb{R}^*$ valós szám úgy, hogy $\{a\} + \{\frac{1}{a}\} = 1$. Igazold, hogy $\{a^n\} + \{\frac{1}{a^n}\} = 1$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ szám esetén!

Megjegyzés. $\{x\}$ az x valós szám tört részét jelöli.